

Úvod do pravděpodobnosti 1

ZS 2025/26, FJFI ČVUT

5. Cvičení

Náhodná procházka na $\mathbb{Z}$

Náhodná procházka na celých číslech $\mathbb{Z}$ je následující koncept. Necht

$$X_n = \begin{cases} +1, & \text{s pravděpodobností } 1/2, \\ -1, & \text{s pravděpodobností } 1/2 \end{cases}$$

jsou nezávislé proměnné. Pak

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n = S_{n-1} + X_n$$

je náhodná procházka na $\mathbb{Z}$.

1. Dokažte, že

$$\mathbb{E}X_n = 0, \quad \text{var } X_n = 1, \quad \mathbb{E}S_n = 0, \quad \text{var } S_n = n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Rozmyslete si, že každou realizaci náhodné procházky do času n je možné popsat pomocí právě jednoho vektoru $(X_1, \dots, X_n) \in \{-1, +1\}^n$; jejich celkový počet je 2^n a všechny jsou stejně pravděpodobné. Necht $N_{n,k}$ je počet možností, jak může náhodná procházka docílit stavu $S_n = k$. Pro která k, n je $N_{n,k} \neq 0$?
3. Dokažte, že pokud $N_{n,k} \neq 0$, tak

$$N_{n,k} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}$$

4. Princip zrcadlení

Necht $n_0 < n_1$ a necht dosažení $S_{n_1} = k_1$ je možné po $S_{n_0} = k_0$. Necht k_0 a k_1 mají stejné znaménko. Rozmyslete si (např. vhodným obrázkem), že existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi cestami z $S_{n_0} = k_0$ do $S_{n_1} = k_1$, které protínají osu $S_m = 0$, a cestami z $S_{n_0} = -k_0$ do $S_{n_1} = k_1$.

Nápověda: Pronásobte část cesty mezi $S_{n_0} = k_0$ a $S_m = 0$ číslem -1.

5. “The Ballot theorem”

Pokud $k > 0$, tak počet cest z $S_0 = 0$ do $S_n = k$, které splňují $S_1 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n > 0$, je

$$\frac{k}{n} N_{n,k}.$$

“Nápověda”:

- $S_1 = 1$ přímo ze zadání;
- počet cest z $S_1 = 1$ do $S_n = k$ je $N_{n-1,k-1}$;

- některé z těchto cest protnou osu $S_m = 0$ a nevyhovují tedy zadání; jejich počet je (podle principu zrcadlení) stejný jako počet cest z $S_1 = -1$ do $S_n = k$, tedy $N_{n-1,k+1}$;
- Definujeme

$$p = \frac{n+k}{2} \quad \text{a} \quad m = \frac{n-k}{2}.$$

Pak platí

$$N_{n-1,k-1} - N_{n-1,k+1} = \binom{m+p-1}{p-1} - \binom{m+p-1}{p} = \dots = \frac{p-m}{p+m} \cdot \frac{(m+p)!}{m!p!} = \frac{k}{n} N_{n,k}.$$

6. Jiná verze “Ballot theorem”:

Ve volbách s n hlasy vyhrál jeden kandidát o k hlasů. Hlasy se sčítaly v náhodném pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že vítězný kandidát vedl po celou dobu sčítání? Odpověď: k/n .

7. K prvnímu návratu do počátku dojde v čase $2n$, pokud $S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0$ a $S_{2n} = 0$. Dokažte, že

$$f_{2n} := \mathbb{P}(\text{k prvnímu návratu do počátku dojde v čase } 2n) = \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} 2^{-2n}.$$

Návod: Cesty, které se poprvé navrací do počátku v čase $2n$, splňují $S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 > 0, \dots, S_{2n-1} = 1, S_{2n} = 0$, případně $S_0 = 0, S_1 = -1, S_2 < 0, \dots, S_{2n-1} = -1, S_{2n} = 0$. Počet cest v první skupině je roven počtu cest z $S_0 = 0$ do $S_{2n-1} = 1$, které jsou pro $m \geq 1$ kladné, tedy

$$\frac{1}{2n-1} N_{2n-1,1} = \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{2n}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n}.$$

Druhá skupina je (ze symetrie) stejně velká, odkud již plyne výsledek.

8. Pravděpodobnost návratu do počátku (v nějakém čase) je 1.

Návod: Stačí ověřit, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1.$$

Využijte, že $f_{2n} = \mathbb{P}(S_{2(n-1)} = 0) - \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

9. Střední doba návratu prvního návratu do počátku je $+\infty$.

Nápověda: Stačí ověřit, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n f_{2n} = +\infty.$$