

Úvod do pravděpodobnosti 1

ZS 2025/26, FJFI ČVUT

4. Cvičení

Střední hodnota

1. V kapse máte jednu desetikorunu, dvě dvacetikoruny a jednu padesátikorunu. Zloděj Vám z kapsy náhodně vybere tři mince.
 - (a) Spočítejte Vaši očekávanou ztrátu.
 - (b) Spočítejte rozptyl Vaší ztráty.
 - (c) Poté, co Vás zloděj okradl, se rozdělí se svým komplicem (spravedlivě) a následně si koupí lístek na tramvaj za 24 Kč. Spočítejte střední hodnotu a rozptyl peněz, které mu zbydou.
2. Test obsahuje n otázek, ke každé z nich jsou uvedeny 4 možné odpovědi a, b, c, d. U každé otázky je právě jedna odpověď správná. Předpokládejme, že student zaškrťává odpovědi zcela náhodně. Označme X počet správně zodpovězených otázek.
 - (a) Odvoďte rozdělení veličiny X . Jak se toto rozdělení nazývá?
 - (b) Jaký je očekávaný počet správně zodpovězených otázek?
 - (c) Spočítejte rozptyl správně zodpovězených otázek.
3. Na vánoční besídku přišlo n dětí. Každé dítě přineslo jeden dárek. Dárky se dávaly do velkého koše. Každý dárek je jiný, ale všechny jsou zabaleny stejným způsobem. Při odchodu si každé dítě náhodně z koše jeden dárek vybere a odnese domů. Jaká je střední hodnota počtu dětí, které si domů odnášejí svůj původní dárek?
4. Jedenáct mužů vyhodí své klobouky do vzduchu a pak si je rozebere zcela náhodně. Každý muž, který přitom dostane svůj vlastní klobouk, odejde a zbývající muži zahájí druhé kolo vyhazování klobouků. To se opakuje tak dlouho, dokud každý muž nedostane svůj klobouk. Jaká je střední hodnota počtu kol vyhazování klobouků?
5. Na talíři leží n špaget. Prostým pohledem se nedá zjistit, které dva konce špaget patří k sobě. Vybereme náhodně a nezávisle dva konce špaget a slepíme je (jedlým) lepidlem a takto pokračujeme, dokud na talíři jsou nějaké konce špaget. Jaká je střední hodnota počtu smyček na konci lepení? Jaká je střední hodnota počtu smyček jednotkové délky?
6. V domě, který má přízemí a n poschodí, je výtah. V přízemí do něj nastoupí p osob, které jedou nezávisle na ostatních s pravděpodobností $1/n$ do některého z pater. Jaká je střední hodnota počtu zastávek výtahu, než z něj všichni vystoupí?
7. Rozhlasová stanice hraje s posluchači následující hru. Ve studiu je náhodně vytaženo jedno z čísel $\{1, \dots, n\}$, přitom vytažení každého z nich je s pravděpodobností $1/n$. Posluchači znají číslo n . Mohou do studia telefonovat a hádat, jaké číslo bylo vytaženo. Pokud uhodnou, hra končí. Pokud volající neuhodne, stanice oznámí, jaké číslo volal a jestli je menší nebo větší než vytažené číslo. Na základě této informace mohou volat a hádat další posluchači. Vypočtete střední hodnotu počtu volání potřebných k uhodnutí čísla, pokud volající vybírá se stejnou pravděpodobností jedno z čísel, která jsou na základě dosavadních informací ještě možná.

8. Uvažujme množinu $\{1, \dots, n\}$. Náhodně vybereme jednu z $\binom{n}{r}$ jejích r -prvkových podmnožin. Jaká je střední hodnota nejmenšího (a největšího) prvku této množiny?
9. K určitému datu bylo v nějakém městě vybráno m různých manželských párů stejného věku. Po několika letech se zjistilo, že z těchto $2m$ osob jich žije jen a . Předpokládejme, že úmrtí kterékoliv osoby je stejně pravděpodobné a nezávislé na přežití či úmrtí ostatních osob. Jaká je střední hodnota počtu manželských párů, které dosud žijí?