Úvod do pravděpodobnosti

Hod kostkou – složitý, deterministický proces, který je teoreticky možné modelovat … známe-li počáteční polohu kostky, ruky, sil, materiálů a pod. … výpočetně složité … proces je velmi nestabilní, malá změna polohy mění zásadně výsledek

Volíme "náhodný model"

$$\mathbb{P}(X=1) = \dots = \mathbb{P}(X=6) = 1/6$$

X … počet bodů hozených na kostce

X … náhodná veličina … její hodnota je "při každém opakování jiná"

Neumíme předpovídat jednotlivé výsledky, ale jen "vhodně položené dotazy": Jaká je pravděpodobnost, že při $n=1000$ hodech bude průměrná hodnota v intervalu $[3{,}4; 3{,}6]$?

Varování: kvantová fyzika?!

• Máme-li „náhodný experiment",

... experiment, který i při stejném postupu končívá různě, a jeho výsledky se nám tedy jeví náhodné

dáme všechny možné výsledky do množiny Ω

např. $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$

... v této přednášce: Ω konečná (nebo nejvýše spočetná)

... „prostor elementárních jevů" ... sample space

Příklady: $\Omega = \{HH, HO, OH, OO\}$ ... hod dvěma mincemi s ohledem na pořadí

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .... počet dětí náhodně vybraného páru

Náhodný jev ... libovolná podmnožina Ω ... $A \subset \Omega$

$A = \{1, 3, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ... na kostce padlo liché číslo

... je-li X výsledek náhodného experimentu, předpokládáme, že lze definovat $\mathbb{P}(X = \omega_j)$, $j = 1, \dots, N$ ... čísla z $[0;1]$

• $\sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(X = \omega_j) = 1$; $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_j \in A} \mathbb{P}(X = \omega_j)$

- Sjednocení jevů : $A \cup B$
- Průnik jevů $A \cap B$
- Disjunktní jevy $A \cap B = \emptyset$ ... neslučitelné
- Opačný jev $\Omega \setminus A$
- Jistý jev $\mathbb{P}(A) = 1$ ... "skoro jistý jev"
- Nemožný jev $\mathbb{P}(A) = 0$
- Používáme i další terminologii z teorie množin ...

Pro pravděpodobnost jevů ... $\mathbb{P}(A)$, $A \subset \Omega$ platí "zřejmé" vztahy

- $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ pro $A \subset B$
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ pro A, B disj.
- obecně $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Rovnoměrné rozdělení (je-li Ω konečná)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \; ; \; \mathbb{P}(\{\omega_j\}) = \frac{1}{N} \text{ pro } \Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}.$$

- <u>Nezávislé jevy</u> : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

Typická = důležitá rozdělení

Rozdělení … informace o $\mathbb{P}(X=\omega_j)$ pro všechna j.

- Bernoulliho rozdělení $\Omega=\{0;1\}$

$$\mathbb{P}(X=0)=1-p;\ \mathbb{P}(X=1)=p\ ;\quad 0\leq p\leq 1$$

… hod mincí … $p=\frac{1}{2}$ … rovnoměrné rozdělení

$p\neq\frac{1}{2}$ … nefér mince

- Binomické rozdělení: $B(n,p)$ … $\Omega=\{0,1,\ldots,n\}$

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\quad\ldots\quad 0\leq p\leq 1$$

… jev nastane k-krát při n pokusech

- Poissonovo rozdělení $\Omega=\{0;1,2,\ldots\}$

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

… pravděpodobnost výskytu k jevů za určitý čas (počet branek za zápas, počet příchodů zákazníků za hodinu, …)

- Počty prvků Ω i A často provádíme kombinatoricky

... počet možných výsledků ve sportce $\binom{49}{6}$

<u>Náhodné veličiny</u> ... reálné funkce $X: \Omega \to \mathbb{R}$

- Hod kostkou $X(j) = j$
- Hod dvěma mincemi ... $X(HH) = 1$, $X(HO) = 2$
  $X(OH) = 3$, $X(OO) = 4$

... označení ... $\{X = x\} = \{\omega_j \in \Omega : X(\omega_j) = x\}$

Distribuční funkce náhodné veličiny X

$$F_X(t) = \mathbb{P}(-\infty < X \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \sum_{x \leq t}{}' p(X = x)$$

- Střední hodnota ... hodnoty X jsou reálná čísla ... lze průměrovat

$$\mathbb{E}X = \sum_t{}' t \cdot \mathbb{P}(X = t)$$

... sčítáme přes všechna reálná čísla t s $\mathbb{P}(X = t) > 0$

... suma musí konvergovat absolutně

- Medián: lib. $x \in \mathbb{R}$ s $\mathbb{P}(X \leq x) \geq 1/2$ a $\mathbb{P}(X \geq x) \geq 1/2$

- Rozptyl: $\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^2$ ... $= \sigma^2$

Nezávislé náhodné veličiny

X, Y ... dvě náhodné veličiny def. na stejném Ω

$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$

... pro každou dvojici $A_X, A_Y \subset \mathbb{R}$ jsou události $X \in A_X$, $Y \in A_Y$ nezávislé

$$\mathbb{P}(X \in A_X \cap Y \in A_Y) = \mathbb{P}(X \in A_X \,\&\, Y \in A_Y)$$

$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_X \,\&\, Y(\omega) \in A_Y\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_X\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in A_Y\})$$

$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_X\}) \cdot \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in A_Y\})$$

$$= \mathbb{P}(X \in A_X) \cdot \mathbb{P}(Y \in A_Y)$$

Pro diskrétní případ $\iff \mathbb{P}(X = x \,\&\, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Základní vlastnosti střední hodnoty

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y \qquad \mathbb{E}[aX] = a\,\mathbb{E}[X]$$

$$\mathbb{E}(XY) = (\mathbb{E}X)\cdot(\mathbb{E}Y)$$ pro X, Y nezávislé!

I, $$\mathbb{E}(X+Y) = \sum_t{}' \, t \cdot \mathbb{P}(X+Y=t) = \sum_t{}' \sum_s{}' \, t \cdot \mathbb{P}(X=s, Y=t-s)$$

$$= \sum_{s,t}{}' (t-s+s)\, \mathbb{P}(X=s, Y=t-s)$$

$$= \sum_{s,t}{}' (t-s)\, \mathbb{P}(X=s, Y=t-s) + \sum_{s,t}{}' s\, \mathbb{P}(X=s, Y=t-s)$$

$$= \sum_{x,y}{}' y \cdot \mathbb{P}(X=x, Y=y) + \sum_{x,y}{}' x\, \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_y{}' y \cdot \underbrace{\sum_x{}' \mathbb{P}(X=x, Y=y)}_{\mathbb{P}(Y=y)} + \sum_x{}' x \underbrace{\sum_y{}' \mathbb{P}(X=x, Y=y)}_{\mathbb{P}(X=x)} = \mathbb{E}Y + \mathbb{E}X$$

II, $$\mathbb{E}[X.Y] = \sum_{x,y}{}' xy\, \mathbb{P}(X=x \,\&\, Y=y) = \sum_{x,y}{}' xy\, \mathbb{P}(X=x)\cdot \mathbb{P}(Y=y)$$

$$= \sum_x{}' x \cdot \mathbb{P}(X=x) + \sum_y{}' y \cdot \mathbb{P}(Y=y)$$