Úvod do pravděpodobnosti 1

ZS 2024/25, FJFI ČVUT

6. Cvičení

Nerovnosti, střední hodnoty, grafy ...

Pravděpodobnostní nerovnosti:

a) Markovova nerovnost: Nechť X je nezáporná náhodná veličina. Pak pro každé $a > 0$ platí

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}.$$

b) Čebyševova nerovnost: Nechť X je náhodná veličina. Pak pro každé $a > 0$ platí

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq a) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X|^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^2}{a^2} = \frac{\operatorname{var}(X)}{a^2}.$$

c) Bernsteinova nerovnost: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé s $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$ a $\varepsilon > 0$. Pak

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-n\varepsilon^2/2\right).$$

Důkaz: Pro $\lambda > 0$ platí podle Markovovy nerovnosti

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda(X_1 + \cdots + X_n) > \lambda n\varepsilon) &= \mathbb{P}(\exp[\lambda(X_1 + \cdots + X_n)] > \exp(\lambda n\varepsilon)) \\ &\leq e^{-\lambda n\varepsilon}\mathbb{E}e^{\lambda(X_1+\cdots+X_n)} = e^{-\lambda n\varepsilon}[\mathbb{E}e^{\lambda X_1}]^n = e^{-\lambda n\varepsilon}\cosh^n(\lambda) \\ &\leq e^{-\lambda n\varepsilon + n\lambda^2/2}, \quad (\cosh(t) \leq e^{t^2/2}).\end{aligned}$$

Pak stačí dosadit $\lambda = \varepsilon$.

Úlohy:

1. (5b) Předpokládejme, že po dlouhé noci se n opilých námořníků vrátí na loď a postupně, nezávisle a náhodně vstoupí do jedné z r kabin a usnou. Za předpokladu, že vyberou každou kabinu s rovnoměrným rozdělením (a ignorují všechny ostatní námořníky, kteří jsou již uvnitř), jaká je střední hodnota počtu prázdných kabin?

2. (6b) Problém sběratele kupónů: Předpokládejme, že v každé krabici cereálií lze nalézt jeden kupón. Existuje n různých typů kupónů. Abyste vyhráli cenu, musíte posbírat všech n typů. Ukažte, že v průměru musíte koupit $\asymp n \ln n$ krabic, abyste vyhráli cenu. Jaký je rozptyl této náhodné veličiny?

3. (3b) Předpokládejme, že pár opravdu chce mít holčičku. Pro jednoduchost předpokládejme, že pohlaví jednotlivých dětí je nezávislé na ostatních dětech a že je 50% šance, že každé narozené dítě bude dívka. Pokud pár trvá na tom, že bude mít děti, dokud si nepořídí dívku, kolik je průměrný počet chlapců, kteří se jim před tím narodí?

4. (6b) Máte $n > 1$ čísel $0, 1, \ldots, n-1$ uspořádaných na kruhu. Náhodný chodec začíná na 0 a v každém kroku se náhodně přesune k jednomu ze svých dvou nejbližších sousedů. Pro každé i vypočítejte pravděpodobnost p_i, že při prvním příchodu do i už byly navštíveny všechny ostatní body - tedy že i je poslední navštívený bod. Např. $p_0 = 0$.

Pravděpodobnostní metoda v teorii grafů

5. Základní pojmy teorie grafů: $G = (V, E)$, obarvení vrcholů, obarvení hran, K_n

6. (3b) V úplném grafu o n vrcholech obarvíme každou hranu červeně s pravděpodobností $0 < p < 1$. Jaká je střední hodnota červených trojúhleníků v grafu?

7. (7b) *Ramseyho číslo* $R(k, \ell)$ je nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: Kdykoliv obarvíme hrany kompletního grafu K_n dvěma barvami (např. červenou a modrou), tak v něm najdeme červené K_k nebo modré K_ℓ. Přesněji řečeno, najdeme k prvkovou podmnožinu K_n takovou, že všechny hrany mezi těmito vrcholy jsou červené nebo najdeme ℓ prvkovou podmnožinu takovou, že všechny hrany mezi těmito vrcholy jsou modré.

   Dokažte: Pokud je $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, pak $R(k, k) > n$. Odtud pak $R(k, k) \geq \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ pro $k \geq 3$.

8. (7b) Na turnaji hraje n hráčů systémem každý s každým hru, u které není možná remíza (a každou z $\binom{n}{2}$ partií tedy někdo vyhrál a někdo prohrál). Řekneme, že turnaj měl vlastnost S_k, pokud pro každou podmnožinu k hráčů existoval jiný hráč, který je všechny porazil.

   Dokažte, že pokud $\binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$, pak existuje turnaj n hráčů, který má vlastnost S_k.

9. (10b)* Dominující podmnožina grafu $G = (V, E)$ je množina $U \subset V$ taková, že každý vrchol $v \in V \setminus U$ má souseda v U. Dokažte, že pokud má v grafu o n vrcholech každý vrchol alespoň $\delta > 1$ sousedů, tak existuje dominující podmnožina o nejvýše $n \dfrac{1 + \ln(\delta + 1)}{\delta + 1}$ vrcholech.

10. (6b) Existuje turnaj o n hráčích a alespoň $n! 2^{-(n-1)}$ hamiltonovských kružnicích. (Hamiltonovská kružnice je kružnice v grafu, která projde právě jednou všemi jeho vrcholy).

11. (5b)* Nechť $G = (V, E)$ je graf o n vrcholech a e hranách. Pak v G existuje bipartitní podgraf o alespoň $e/2$ hranách. (Graf se nazývá bipartitní, pokud lze jeho vrcholy rozdělit na dvě části a všechny hrany vedou jen mezi těmito částmi, ne uvnitř těchto částí.)

12. (5b)* Existuje obarvení K_n dvěma barvami, které má nanejvýš $\binom{n}{a} 2^{1-\binom{a}{2}}$ monochromatických K_a.

13. (7b) Nechť $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ jsou jednotkové vektory, tedy $\|v_i\|_2 = 1$ pro $i = 1, \ldots, n$. Pak existují $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ takové, že $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\|_2 \leq \sqrt{n}$ a také existují $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \{-1, +1\}$ takové, že $\|\varphi_1 v_1 + \cdots + \varphi_n v_n\|_2 \geq \sqrt{n}$.