**Úvod do pravděpodobnosti 1**

*ZS 2024/25, FJFI ČVUT*

# 5. Cvičení

Náhodná procházka na $\mathbb{Z}$

---

Náhodná procházka na celých číslech $\mathbb{Z}$ je následující koncept. Nechť

$$X_n = \begin{cases} +1, & \text{s pravděpodobností} \quad 1/2, \\ -1, & \text{s pravděpodobností} \quad 1/2 \end{cases}$$

jsou nezávislé proměnné. Pak

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n = S_{n-1} + X_n$$

je náhodná procházka na $\mathbb{Z}$.

1. (2b) Dokažte, že

   $$\mathbb{E}X_n = 0, \quad \operatorname{var} X_n = 1, \quad \mathbb{E}S_n = 0, \quad \operatorname{var} S_n = n$$

   pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$.

2. (2b) Rozmyslete si, že každou realizaci náhodné procházky do času $n$ je možné popsat pomocí právě jednoho vektoru $(X_1, \ldots, X_n) \in \{-1, +1\}^n$; jejich celkový počet je $2^n$ a všechny jsou stejně pravděpodobné. Nechť $N_{n,k}$ je počet možností, jak může náhodná procházka docílit stavu $S_n = k$. Pro která $k, n$ je $N_{n,k} \neq 0$?

3. (3b) Dokažte, že pokud $N_{n,k} \neq 0$, tak

   $$N_{n,k} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}$$

4. (3b) Princip zrcadlení
   Nechť $n_0 < n_1$ a nechť dosažení $S_{n_1} = k_1$ je možné po $S_{n_0} = k_0$. Nechť $k_0$ a $k_1$ mají stejné znaménko. Rozmyslete si (např. vhodným obrázkem), že existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi cestami z $S_{n_0} = k_0$ do $S_{n_1} = k_1$, které protínají osu $S_m = 0$, a cestami z $S_{n_0} = -k_0$ do $S_{n_1} = k_1$.
   Nápověda: Pronásobte část cesty mezi $S_{n_0} = k_0$ a $S_m = 0$ číslem -1.

5. (3b) “The Ballot theorem”
   Pokud $k > 0$, tak počet cest z $S_0 = 0$ do $S_n = k$, které splňují $S_1 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n > 0$, je

   $$\frac{k}{n} N_{n,k}.$$

   “Nápověda”:

   - $S_1 = 1$ přímo ze zadání;
   - počet cest z $S_1 = 1$ do $S_n = k$ je $N_{n-1,k-1}$;

- některé z těchto cest protnou osu $S_m = 0$ a nevyhovují tedy zadání; jejich počet je (podle principu zrcadlení) stejný jako počet cest z $S_1 = -1$ do $S_n = k$, tedy $N_{n-1,k+1}$;
- Definujme
$$p = \frac{n+k}{2} \quad \text{a} \quad m = \frac{n-k}{2}.$$
Pak platí
$$N_{n-1,k-1} - N_{n-1,k+1} = \binom{m+p-1}{p-1} - \binom{m+p-1}{p} = \cdots = \frac{p-m}{p+m} \cdot \frac{(m+p)!}{m!p!} = \frac{k}{n} N_{n,k}.$$

6. (3b) Jiná verze "Ballot theorem":
Ve volbách s $n$ hlasy vyhrál jeden kanditát o $k$ hlasů. Hlasy se sčítaly v náhodném pořadí. Jaká je paravděpodobnost, že vítězný kandidát vedl po celou dobu sčítání? Odpověď: $k/n$.

7. (3b) K prvnímu návratu do počátku dojde v čase $2n$, pokud $S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0$ a $S_{2n} = 0$. Dokažte, že
$$f_{2n} := \mathbb{P}(\text{k prvnímu návratu do počátku dojde v čase } 2n) = \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}2^{-2n}.$$
Návod: Cesty, které se poprvé navrací do počátku v čase $2n$, splňují $S_0 = 0$, $S_1 = 1$, $S_2 > 0$, $\ldots$, $S_{2n-1} = 1$, $S_{2n} = 0$, případně $S_0 = 0, S_1 = -1, S_2 < 0, \ldots, S_{2n-1} = -1$, $S_{2n} = 0$. Počet cest v první skupině je roven počtu cest z $S_0 = 0$ do $S_{2n-1} = 1$, které jsou pro $m \geq 1$ kladné, tedy
$$\frac{1}{2n-1} N_{2n-1,1} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{2n}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}.$$
Druhá skupina je (ze symetrie) stejně veliká, odkud již plyne výsledek.

8. (3b) Pravděpodobnost návratu do počátku (v nějakém čase) je 1.
Návod: Stačí ověřit, že
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1.$$
Využijte, že $f_{2n} = \mathbb{P}(S_{2(n-1)} = 0) - \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

9. (3b) Střední doba návratu prvního návratu do počátku je $+\infty$.
Nápověda: Stačí ověřit, že
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n f_{2n} = +\infty.$$