Úvod do pravděpodobnosti 1

ZS 2024/25, FJFI ČVUT

1. Cvičení

Opakování, kombinatorika, nezávislé jevy

Bodové ohodnocení je u každé úlohy jiné a je uvedeno u úloh. Pokud má úloha více podúloh, jsou body myšleny za celou úlohu dohromady.

---

1. (2b) a) Jak pravděpodobné je, že při hodech 7 mincemi padne právě třikrát hlava?
   b) Jak pravděpodobné je, že při 5 hodech kostkou padnou právě dvě šestky?
   c) Jaká je pravděpodobnost, že při dvou hodech kostkou bude číslo v druhém hodu větší než v prvním?

2. (3b) Házíme čtyřmi šestistěnnými hracími kostkami. Určete, jaká je pravděpodobnost, že (a) padnou čtyři různá čísla, (b) padnou pouze lichá čísla, (c) součet čísel na všech kostkách dohromady bude roven 6, (d) součet čísel bude větší než 5, (e) padne alespoň jedna šestka.

3. (2b) a) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi kostkami hodíme součet 9?
   b) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi kostkami hodíme součet 10?
   c) Jaký součet je při hodu třemi kostkami nejpravděpodobnější?

4. (2b) Který z následujících jevů má největší pravděpodobnost:
   a) při hodu 6 kostkami padne aspoň jedna šestka,
   b) při hodu 12 kostkami padnou aspoň dvě šestky,
   c) při hodu 18 kostkami padnou aspoň tři šestky?

5. (2b) Jaká je pravděpodobnost, že při čtyřech po sobě následujících hodech šestistěnnou kostkou padne aspoň jednou šestka?
   Jaká je pravděpodobnost, že ve 24 hodech dvěma kostkami padnou aspoň jednou dvě šestky?
   Na kterou z obou událostí je výhodnější si vsadit?

6. (2b) Na svazku máme 8 různých klíčů a pokoušíme se odemknout zámek.
   a) Vyzkoušený klíč vždy dáme stranou a náhodně vybereme další klíč ze zbývajících. Jaká je pravděpodobnost, že odemkneme až na pátý pokus?
   b) Vyzkoušený klíč vrátíme do svazku a náhodně vybereme nějaký klíč, který opět vyzkoušíme. Jaká je pravděpodobnost, že odemkneme až na pátý pokus?

7. (2b) Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině n lidí existuje člověk, který má narozeniny právě dnes?
   Jak velké musí být n, aby tato pravděpodobnost byla aspoň $1/2$?

8. (2b) Uvažujme dva stejně dobré hráče, kteří hrají sérii her, ve kterých není remíza. Oba vsadili stejnou částku a dohodli se, že kdo první vyhraje 6 her, získá celou vsazenou sumu peněz. V době, kdy první hráč vyhrál 5 her a druhý 3 hry, museli svůj souboj přerušit. Jak si mají sázku spravedlivě rozdělit?

9. (6b) Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek (s již nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
(a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
(b*) Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$.

10. (6b) Do vlaku s n vagóny nastupuje r cestujících. Předpokládejme, že každý člověk si vybírá vagón zcela náhodně.
(a) Určete, s jakou pravděpodobností bude v prvním vagóně právě $k \leq r$ cestujících.
(b) Jaká je pravděpodobnost, že žádný vagón nebude prázdný?
(c*) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty, r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.

11. (?b) Babička rozděluje r tisícikorun do n obálek pro svých n vnoučat k Vánocům. Peníze rozmístí náhodně (všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná).
(a) Určete pravděpodobnost, že vnuk Karel dostane právě k tisícikorun.
(b) Jaká je pravděpodobnost, že každé z vnoučat dostane alespoň nějaké peníze?
(c*) Spočtěte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty, r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.
(2b) bude-li počítáno před 10. úlohou, jinak 2b; stejně tak u 10. úlohy.

12. (6b) V loterii se stíracími losy je m políček s výhrou, z políček s nápisem "Prásk!" a k políček prázdných. Pro dosažení výhry stíráme políčka ve zvoleném pořadí a musíme odkrýt všech m políček s výhrou dříve, než odkryjeme jakékoliv políčko s nápisem "Prásk!". Jaká je pravděpodobnost výhry?
a) Zkuste spočítat danou pravděpodobnost rozkladem podle pořadí prvního setřeného políčka "Prásk!".
b) Zdůvodněte, proč výsledek nezávisí na k a ověřte, že dostane stejný výsledek jako v a).

13. (2b) Ve skříni je rozházeno 6 různých párů střevíců. Potmě vybereme ze skříně pět bot. Jaká je pravděpodobnost, že z nich lze sestavit alespoň jeden pár?

14. (2b) Roztržitý profesor matematiky zapomíná v obchodě deštník s pravděpodobností 1/4 (tedy za předpokladu, že tam s ním vůbec dojde). Vyšel z domova s deštníkem, navštívil tři obchody a při návratu domů si uvědomil, že už deštník nemá. Jaká je pravděpodobnost, že jej zapomněl v 1., 2., 3. obchodě?

15. (2b) Žena cestuje během jedné cesty se třemi leteckými společnostmi. Pravděpodobnost, že její kufr ztratí první z nich, je 1%, u druhé z nich jsou to 3% a u poslední pak 2%. Jaká je pravděpodobnost, že dojde ke ztrátě kufru některou společností? Pokud ke ztrátě dojde, jaká je pravděpodobnost, že za ztrátu může 1., 2., 3. společnost?

16. (2b) V žaláři je vězeň odsouzený k smrti. Výstřední žalářník však dá vězni šanci. Přinese mu 12 černých a 12 bílých kuliček. Pak mu dá dvě prázdné urny. Sdělí mu, že zítra přijde kat, náhodně vybere jednu urnu a z ní náhodně vybere jednu kuličku. Bude-li bílá, dostane vězeň milost. Jak má vězeň rozdělit kuličky do uren, aby maximalizoval pravděpodobnost svého osvobození?

17. (2b) V jednom městě jezdí 85% zelených a 15% modrých taxíků. Svědek dopravní nehody vypověděl, že nehodu zavinil řidič modrého taxíku, který pak ujel. Testy provedené za obdobných světelných podmínek ukázaly, že svědek správně identifikuje barvu taxíku v 80% procentech případů a ve 20% případů se mýlí. Jaká je pravděpodobnost, že viník nehody skutečně řídil modrý taxík?