Úvod do pravděpodobnosti 1

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

Poslední cvičení

Náhodné grafy

1. Základní pojmy teorie grafů: $G = (V, E)$, obarvení vrcholů, obarvení hran, K_n
2. *Ramseyho číslo* $R(k, \ell)$ je nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: Kdykoliv obarvíme hrany kompletního grafu K_n dvěma barvami (např. červenou a modrou), tak v něm najdeme červené K_k nebo modré K_ℓ. Přesněji řečeno, najdeme k prvkovou podmnožinu K_n takovou, že všechny hrany mezi těmito vrcholy jsou červené nebo najdeme ℓ prvkovou podmnožinu takovou, že všechny hrany mezi těmito vrcholy jsou modré.

   Dokažte: Pokud je $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, pak $R(k,k) > n$. Odtud pak $R(k,k) \geq \lfloor 2^{k/2} \rfloor$ pro $k \geq 3$.
3. Na turnaji hraje n hráčů systémem každý s každým hru, u které není možná remíza (a každou z $\binom{n}{2}$ partií tedy někdo vyhrál a někdo prohrál). Řekneme, že turnaj měl vlastnost S_k, pokud pro každou podmnožinu k hráčů existoval jiný hráč, který je všechny porazil.

   Dokažte, že pokud $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, pak existuje turnaj n hráčů, který má vlastnost S_k.
4. Dominující podmnožina grafu $G = (V, E)$ je množina $U \subset V$ taková, že každý vrchol $v \in V \setminus U$ má souseda v U. Dokažte, že pokud má v grafu o n vrcholech každý vrchol alespoň $\delta > 1$ sousedů, tak existuje dominující podmnožina o nejvýše $n\frac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$ vrcholech.
5. Existuje turnaj o n hráčích a alespoň $n!2^{-(n-1)}$ hamiltonovských kružnicích.
6. Nechť $G = (V, E)$ je graf o n vrcholech a e hranách. Pak v G existuje biparitní podgraf o alespoň $e/2$ hranách.
7. Existuje obarvení K_n dvěma barvami, které má nanejvýš $\binom{n}{a}2^{1-\binom{a}{2}}$ monochromatických K_a.
8. Nechť $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ jsou jednotkové vektory, tedy $\|v_i\|_2 = 1$ pro $i = 1, \ldots, n$. Pak existují $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, +1\}$ takové, že $\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\|_2 \leq \sqrt{n}$ a také existují $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \{-1, +1\}$ takové, že $\|\varphi_1 v_1 + \cdots + \varphi_n v_n\|_2 \geq \sqrt{n}$.