Úvod do pravděpodobnosti 1

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

6. Cvičení

Další úlohy ...

---

1. Předpokládejme, že po dlouhé noci se n opilých námořníků vrátí na loď a postupně, nezávisle a náhodně vstoupí do jedné z r kabin a usnou. Za předpokladu, že vyberou každou kabinu s rovnoměrným rozdělením (a ignorují všechny ostatní námořníky, kteří jsou již uvnitř), jaká je střední hodnota počtu prázdných kabin?

2. V úplném grafu o n vrcholech obarvíme každou hranu červeně s pravděpodobností $0 < p < 1$. Jaká je střední hodnota červených trojúhleníků v grafu?

3. a) Markovova nerovnost: Nechť X je nezáporná náhodná veličina. Pak pro každé $a > 0$ platí
$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}X}{a}$$
b) Čebyševova nerovnost: Nechť X je náhodná veličina. Pak pro každé $a > 0$ platí
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq a) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X|^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|^2}{a^2} = \frac{\operatorname{var}(X)}{a^2}$$
c) Bernsteinova nerovnost: Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé s $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$ a $\varepsilon > 0$. Pak
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-n\varepsilon^2/2\right).$$
Důkaz: Pro $\lambda > 0$ platí podle Markovovy nerovnosti
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\lambda(X_1 + \cdots + X_n) > \lambda n\varepsilon) &= \mathbb{P}(\exp[\lambda(X_1 + \cdots + X_n)] > \exp(\lambda n\varepsilon)) \\ &\leq e^{-\lambda n\varepsilon}\mathbb{E}e^{\lambda(X_1+\cdots+X_n)} = e^{-\lambda n\varepsilon}[\mathbb{E}e^{\lambda X_1}]^n = e^{-\lambda n\varepsilon}\cosh^n(\lambda) \\ &\leq e^{-\lambda n\varepsilon + n\lambda^2/2}, \quad (\cosh(t) \leq e^{t^2/2}).\end{aligned}$$
Pak stačí dosadit $\lambda = \varepsilon$.

4. Problém sběratele kupónů: Předpokládejme, že v každé krabici cereálií lze nalézt jeden kupón. Existuje n různých typů kupónů. Abyste vyhráli cenu, musíte posbírat všech n typů. Ukažte, že v průměru musíte koupit $\asymp n \ln n$ krabic, abyste vyhráli cenu.

5. Předpokládejme, že pár opravdu chce mít holčičku. Pro jednoduchost předpokládejme, že pohlaví jednotlivých dětí je nezávislé na ostatních dětech a že je 50% šance, že každé narozené dítě bude dívka. Pokud pár trvá na tom, že bude mít děti, dokud si nepořídí dívku, kolik je průměrný počet chlapců, kteří se jim před tím narodí?

6. Máte $n > 1$ čísel $0, 1, \ldots, n-1$ uspořádaných na kruhu. Náhodný chodec začíná na 0 a v každém kroku se náhodně přesune k jednomu ze svých dvou nejbližších sousedů. Pro každé i vypočítejte pravděpodobnost p_i, že při prvním příchodu do i už byly navštíveny všechny ostatní body - tedy že i je poslední navštívený bod. Např. $p_0 = 0$.