

# Úvod do pravděpodobnosti 1

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

## 5. Cvičení

Náhodná procházka na  $\mathbb{Z}$

---

Náhodná procházka na celých číslech  $\mathbb{Z}$  je následující koncept. Necht

$$X_n = \begin{cases} +1, & \text{s pravděpodobností } 1/2, \\ -1, & \text{s pravděpodobností } 1/2. \end{cases}$$

jsou nezávislé proměnné. Pak

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n = S_{n-1} + X_n$$

je náhodná procházka na  $\mathbb{Z}$ .

1. Dokažte, že

$$\mathbb{E}X_n = 0, \quad \text{var } X_n = 1, \quad \mathbb{E}S_n = 0, \quad \text{var } S_n = n$$

pro všechna  $n \in \mathbb{N}_0$ .

2. Rozmyslete si, že každou realizaci náhodné procházky do času  $n$  je možné popsat pomocí právě jednoho vektoru  $(X_1, \dots, X_n) \in \{-1, +1\}^n$ ; jejich celkový počet je  $2^n$  a všechny jsou stejně pravděpodobné. Necht  $N_{n,k}$  je počet možností, jak může náhodná procházka docílit stavu  $S_n = k$ . Pro která  $k, n$  je  $N_{n,k} \neq 0$ ?
3. Dokažte, že pokud  $N_{n,k} \neq 0$ , tak

$$N_{n,k} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n-k}{2}}$$

4. Princip zrcadlení

Necht  $n_0 < n_1$  a necht dosažení  $S_{n_1} = k_1$  je možné po  $S_{n_0} = k_0$ . Necht  $k_0$  a  $k_1$  mají stejné znaménko. Rozmyslete si (např. vhodným obrázkem), že existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi cestami z  $S_{n_0} = k_0$  do  $S_{n_1} = k_1$ , které protínají osu  $S_m = 0$ , a cestami z  $S_{n_0} = -k_0$  do  $S_{n_1} = k_1$ .

Nápověda: Pronásobte část cesty mezi  $S_{n_0} = k_0$  a  $S_m = 0$  číslem  $-1$ .

5. "The Ballot theorem"

Pokud  $k > 0$ , tak počet cest z  $S_0 = 0$  do  $S_n = k$ , které splňují  $S_1 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n > 0$ , je

$$\frac{k}{n} N_{n,k}.$$

"Nápověda":

- $S_1 = 1$  přímo ze zadání;
- počet cest z  $S_1 = 1$  do  $S_n = k$  je  $N_{n-1, k-1}$ ;

- některé z těchto cest protnou osu  $S_m = 0$  a nevyhovují tedy zadání; jejich počet je (podle principu zrcadlení) stejný jako počet cest z  $S_1 = -1$  do  $S_n = k$ , tedy  $N_{n-1, k+1}$ ;
- Definujme

$$p = \frac{n+k}{2} \quad \text{a} \quad m = \frac{n-k}{2}.$$

Pak platí

$$N_{n-1, k-1} - N_{n-1, k+1} = \binom{m+p-1}{p-1} - \binom{m+p-1}{p} = \dots = \frac{p-m}{p+m} \cdot \frac{(m+p)!}{m!p!} = \frac{k}{n} N_{n, k}.$$

6. Jiná verze "Ballot theorem":

Ve volbách s  $n$  hlasy vyhrál jeden kandidát o  $k$  hlasů. Hlasy se sčítaly v náhodném pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že vítězný kandidát vedl po celou dobu sčítání? Odpověď:  $k/n$ .

7. K prvnímu návratu do počátku dojde v čase  $2n$ , pokud  $S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0$  a  $S_{2n} = 0$ . Dokažte, že

$$f_{2n} := \mathbb{P}(\text{k prvnímu návratu do počátku dojde v čase } 2n) = \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} 2^{-2n}.$$

Návod: Cesty, které se poprvé navrací do počátku v čase  $2n$ , splňují  $S_0 = 0, S_1 = 1, S_2 > 0, \dots, S_{2n-1} = 1, S_{2n} = 0$ , případně  $S_0 = 0, S_1 = -1, S_2 < 0, \dots, S_{2n-1} = -1, S_{2n} = 0$ . Počet cest v první skupině je roven počtu cest z  $S_0 = 0$  do  $S_{2n-1} = 1$ , které jsou pro  $m \geq 1$  kladné, tedy

$$\frac{1}{2n-1} N_{2n-1, 1} = \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{2n}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n}.$$

Druhá skupina je (ze symetrie) stejně veliká, odkud již plyne výsledek.

8. Pravděpodobnost návratu do počátku (v nějakém čase) je 1.

Návod: Stačí ověřit, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1.$$

Využijte, že  $f_{2n} = \mathbb{P}(S_{2(n-1)} = 0) - \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ .

9. Střední doba návratu prvního návratu do počátku je  $+\infty$ .

Nápověda: Stačí ověřit, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n f_{2n} = +\infty.$$