# Randomizované SVD

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ... hledáme aproximaci nízké hodnosti

$$\underset{m\times n}{A} \approx \underset{m\times k}{B} \times \underset{k\times n}{C}$$

... $k$ ... numerical rank

$k \ll \min(m,n)$

- Metoda založená na rekonstrukci range(A), resp. jeho aproximaci.

Q ... matice s ortonormálními sloupci, báze range(A)

... $y \in \mathrm{range}(A)$ ... $Q = \begin{pmatrix} | & & | \\ q_1 & \dots & q_k \\ | & & | \end{pmatrix}$

- $y = \sum_{j=1}^{k} \langle q_j, y \rangle q_j$ ... $y = QQ^* y$

- $y = Ax,\ x \in \mathbb{R}^n$ ... $Ax = QQ^*Ax$ ... $A \approx QQ^*A$

Stage A: ... spočteme aproximativní bázi range(A)

... Q s ortonorm. sloupci : $A \approx QQ^*A$

Stage B: Spočteme SVD matice A užitím Q.

---

Máme A, hledáme $A = U\Sigma V^*$ ... resp. $A \approx U\Sigma V^*$ ... nejprve najdeme Q

1, $B := Q^*A$ ... $A \approx QB$

2, $B = \tilde{U}\Sigma V^*$

3, $U = Q\tilde{U}$

Jak najít range(A) … prostě zobrazíme A několik náhodných vektorů!

- $y^1 = A\omega^1, \ldots, y^k = A\omega^k$

  … s $\mathbb{P} = 1$ budou $y^1, \ldots, y^k$ lin. nezávislá (při rank(A) = k)

  $\mathrm{span}\{y^1, \ldots, y^k\} = \mathrm{range}(A)$.

- Pokud bude $A = B + E$, $\mathrm{rank}(B) = k$, E malá

  začne to být
  - nepřesné
  - nestabilní

  → vyrobíme $y^1, \ldots, y^{k+p}$ … oversampling

  … $\Omega = \begin{pmatrix} | & & | \\ w_1 & \ldots & w_{k+p} \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (k+p)}$ … $Y = A\Omega = \begin{pmatrix} | & & | \\ Aw_1 & \ldots & Aw_{k+p} \\ | & & | \end{pmatrix}$

  => & ortonormalizace range(Y).

Řada otázek: Jaké $\Omega$? Jaké $p$? Výpočetní složitost?

Odhady chyby? S jakou pravděpodobností?

Modifikace pro různé typy matic?

__Věta__: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \geq 2$, $p \geq 2$, $k + p \leq \min(m,n)$

Zvolme $\Omega \in \mathbb{R}^{n \times (k+p)}$ Gaussovskou, $Y := A\Omega$, Q … sloupce jsou ortonorm. báze range(Y).

Pak
$$\mathbb{E}\, \|A - QQ^* A\| \leq \left[1 + \frac{4\sqrt{k+p}}{p-1}\sqrt{\min(m,n)}\right] \sigma_{k+1}.$$

E - vzhledem k $\Omega$, $\sigma_{k+1}$ … sing. čísla A. … volba $p = k$?

• Chybu lze zmenšit volbou $Y = (AA^*)^q A \Omega$, $q = 0, 1, 2, \dots$

$$\underset{p=k}{\Longrightarrow} \mathbb{E}\|A - U\Sigma V^*\| \leq \left[1 + 4\sqrt{\frac{2\min(m,n)}{k-1}}\right]^{\frac{1}{2q+1}} \sigma_{k+1}.$$

Např. $m = n = 10^6$, $p = k = 100$

$q = 0$ $\quad 1 + 4\sqrt{\frac{2 \cdot 10^6}{10^2}} \sim 1 + 4\sqrt{2} \cdot 100 \quad \sim 566$

$q = 1$ $\quad (\ \ )^{1/3} \quad \sim 8{,}27$

$q = 2$ $\quad (\ \ )^{1/5} \quad \sim 3{,}55$