6. Kapitola

- odvození jpdf pro vlastní čísla Gaussovských matic

Máme jpdf elementů H (resp. horního trojúhelníku nad diagonálou)

$$\rho[H] = \prod_{i=1}^{N}\left[\frac{e^{-H_{ii}^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\prod_{i<j}\frac{e^{-H_{ij}^2}}{\sqrt{\pi}}\right]$$

Z toho chceme odvodit

$$\rho(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{Z_{N,1}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} x_j^2} \prod_{j<k} |x_j - x_k| \qquad Z_{N,1} = (2\pi)^{N/2}\prod_{j=1}^{N}\frac{\Gamma(1+j/2)}{\Gamma(1+1/2)}$$

$\boxed{\beta = 1}$

Budeme potřebovat singulární rozklad H... $H = OXO^T$,

$X = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_N)$, O ortogonální ... $OO^T = \mathbb{1}$... identita

- Nejprve k substitucím

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^2} dx\,dy\, \rho_1(x,y) \quad ; \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} dx\,dy\, \rho_2(x,y)$$

$$\rho_1(x,y) = f(x^2+y^2) \quad ; \quad \rho_2(x,y) = x f(x^2+y^2)$$

... polární souřadnice $\{x,y\} = \{r\cos\theta, r\sin\theta\}$

$$\hat{\rho}_1(r,\theta) = r f(r^2) \quad ; \quad \hat{\rho}_2(r,\theta) = r^2\cos\theta\, f(r^2)$$

... r je za extra faktor ... $r = J(r,\theta) = \left|\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}\right|$

• Teď k objemům

1, Jednotková koule v $\mathbb{R}^n$ ... $\{x\in\mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq 1\}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2/2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x_1^2/2 - \dots - x_n^2/2} dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt\right)^n = (2\pi)^{n/2}$$

$$\| $$

$$\int_0^\infty \int_{rS^{n-1}} e^{-\frac{1}{2}r^2} dA\, dr = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}r^2} \cdot r^{n-1} A_{n-1} dr = A_{n-1} \int_0^\infty e^{-t} (2t)^{\frac{n-2}{2}} dt$$

$t = r^2/2$

$dt = r\,dr$

$$= A_{n-1} 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(n/2)$$

$$\Rightarrow A_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \; ; \; V_n = \int_0^1 \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} r^{n-1} dr = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} .$$

2, Ortogonální matice

$O \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $OO^T = \mathbb{1}$

... počet stupňů volnosti ... dimenze

první řádek ... $N-1$ ... N & podm. $\|x\|_2^2 = 1$

druhý řádek $N-1-1$ ... ort. na první řádek

⋮

N-tý řádek $N-1-(N-1)=0$

Celkem $D_N = \sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{(N-1)N}{2}$.

Jaký je D_N-dimenzionální objem $\{O\in\mathbb{R}^{N\times N} : OO^T = \mathbb{1}\}$?

První řádek: $\frac{2\, \pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{N}{2})}$, Druhý: $\frac{2\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})}$ ......

Celkem je $\mathrm{vol}(\mathbb{V}_N) = \dfrac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)} \cdot \dfrac{2\pi^{\frac{N-1}{2}}}{\Gamma(\frac{N-1}{2})} \cdots \dfrac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)}$

$$= \frac{2^N \pi^{\frac{N(N+1)}{4}}}{\Gamma(N/2)\cdots\Gamma(1/2)} = \frac{2^N \pi^{N^2/2}}{\Gamma_N(N/2)} \;;\; \Gamma_m(a) = \pi^{m(m-1)/4} \prod_{i=1}^{m} \Gamma\left(a - \frac{i-1}{2}\right)$$

- "Kontrola" pro $N=2$ ... mělo by vyjít $\mathrm{vol}(\mathbb{V}_2) = \dfrac{2^2 \cdot \pi^2}{\pi^{1/2}\,\Gamma(1)\,\Gamma(1/2)} = 4\pi.$

- $O = \begin{pmatrix} o_{11} & o_{12} \\ o_{21} & o_{22} \end{pmatrix}$: $\quad o_{11}^2 + o_{12}^2 = 1$
$\quad o_{21}^2 + o_{22}^2 = 1$
$\quad o_{11} \cdot o_{12} + o_{21} o_{22} = 0$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{ nebo } \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$\varphi \in [0, 2\pi] \qquad \varphi \in [0, 2\pi] \qquad \to 4\pi.$

- $\mathrm{Vol}(\mathbb{V}_2) = \displaystyle\int \prod_{ij=1}^{2} do_{ij}\; \delta\left(\sqrt{o_{11}^2 + o_{21}^2} - 1\right) \delta\left(\sqrt{o_{12}^2 + o_{22}^2} - 1\right) \delta(o_{11} o_{12} + o_{21} o_{22})$

$o_{11} = r\cos\varphi \qquad o_{12} = R\cos\theta$

$o_{21} = r\sin\varphi \qquad o_{22} = R\sin\theta$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} dR \; r \cdot R \cdot \delta(r-1)\,\delta(R-1)\,\delta(rR\cos\varphi\cos\theta + rR\sin\varphi\sin\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \; \delta(\cos(\varphi - \theta)) = \int_0^{2\pi} 2\, d\varphi = 4\pi.$$

$\varphi - \theta = \frac{\pi}{2}$

$\varphi - \theta = \frac{3\pi}{2}$

Od hustoty prvků H k hustotě vlastních čísel

$$\rho(H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN}) \prod_{i \leq j} dH_{ij} = \rho(H_{11}(x,O), \dots, H_{NN}(x,O)) \, |J(H \to \{x, O\})| \cdot dO \cdot \prod_{i=1}^{N} dx_i$$

- počet d. na obou stranách: $\frac{N(N+1)}{2} = N + \frac{N(N-1)}{2}$.

- $J(H \to \{x,O\})$ nebude záviset na O, jen $\max$.

  přesněji $J(H \to \{x,O\}) = \prod_{j>k} (x_j - x_k)$

- Nakonec nás bude zajímat hustota rozdělení vlastních čísel, tedy

$$\hat{\rho}(x_1, \dots, x_N) dx = dx \int_{\mathbb{V}_N} dO \, \hat{\rho}(x_1, \dots, x_N, O) =$$

$$= dx \int_{\mathbb{V}_N} \rho(H_{11}(x,O), \dots, H_{NN}(x,O)) \cdot |J(H \to \{x,O\})| dO$$

$$= dx \cdot |J(H \to \{x,O\})| \cdot \int_{\mathbb{V}_N} \rho(H_{11}(x,O), \dots, H_{NN}(x,O)) dO.$$

... nejraději bychom, aby $\rho(H_{11}(x,O), \dots, H_{NN}(x,O))$ bylo rotačně invariantní – záviselo jen na $x_1, \dots, x_N$!

Nechť reálná symetrická $N\times N$ matice H má jpdf svých elementů

$$\rho[H] = \phi(\mathrm{Tr}H, \mathrm{Tr}H^2, \dots, \mathrm{Tr}H^m)$$ (a je tedy rotačně invariantní).

Pak jpdf <u>uspořádaných</u> vlastních čísel je $(x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_N)$

$$\rho_{ord}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\pi^{N^2/2}}{\Gamma_N(N/2)} \phi\left(\sum_i x_i, \sum_i x_i^2, \dots, \sum_i x_i^N\right) \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

Pro GOE: $$\rho[H] = \prod_{i=1}^{N} \frac{e^{-H_{ii}^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \prod_{i<j} \frac{e^{-H_{ij}^2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\pi^{\frac{N^2-N}{4}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}H^2\right)$$

Theorem $\Rightarrow$ $$\rho_{ord}(x_1, \dots, x_N) = \frac{\pi^{N^2/2}}{\Gamma_N(N/2)} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{N/2}\pi^{\frac{N^2-N}{4}}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

- Ve srovnání s předchozím se vše liší jen o $N!$ ... normalizační faktor
  ... rozdíl mezi uspořádanými a neuspořádanými vlastními čísly!
- Chybí faktor 2^N ... vlastní vektory určené až na znaménko!

Ještě k přepočtu $\rho(H_{11}(x,O), \dots, H_{NN}(x,O))$:

$$\rho(H_{11}, \dots, H_{NN}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uakonst.}}}{\sim} \prod_{i=1}^{N} e^{-H_{ii}^2/2} \prod_{i<j} e^{-H_{ij}^2} =$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{N} -H_{ii}^2/2 - \sum_{i<j} H_{ij}^2 \right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} H_{ij}^2 \right)$$

Dále je $H_{ij} = (OXO^T)_{ij} = \sum_{l=1}^{N} O_{il} (XO^T)_{lj}$

$$= \sum_{l=1}^{N} O_{il} \sum_{k=1}^{N} (X)_{lk} (O^T)_{kj} = \sum_{k,l=1}^{N} O_{il} O_{jk} x_{lk} = \sum_{k=1}^{N} O_{ik} x_k O_{jk}$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{N} H_{ij}^2 = \sum_{i,j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N} O_{ik} x_k O_{jk} \right)^2 = \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{k,l=1}^{N} O_{ik} x_k O_{jk} O_{il} x_l O_{jl}$$

$$= \sum_{k,l=1}^{N} x_k x_l \sum_{i,j=1}^{N} O_{ik} O_{il} O_{jk} O_{jl} = \sum_{k,l=1}^{N} x_k x_l \left(\sum_{i=1}^{N} O_{ik} O_{il} \right) \left(\sum_{j=1}^{N} O_{jk} O_{jl} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} x_k^2 .$$

Celkem je tedy

$$\hat{\varrho}(x_1,\dots,x_N) = |J(H \to \{O,x\})| \cdot \varrho(H_{11}(x,O),\dots,H_{NN}(x,O)) \int_{\mathbb{V}_N} dO$$

$$= \prod_{j<k} |x_j - x_k| \cdot \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \cdot \frac{1}{\pi^{N(N-1)/4}} \cdot e^{-\|x\|_2^2/2} \cdot Vol(\mathbb{V}_N)$$

$$= e^{-\|x\|_2^2} \prod_{j<k} |x_j - x_k| \cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \cdot \frac{1}{\pi^{N(N-1)/4}} \cdot \frac{2^N \cdot \pi^{N(N+1)/4}}{\Gamma(N/2)\dots\Gamma(1/2)}}_{(*)}$$

$$(*) = \frac{2^{N/2}}{\pi^{N/2}} \cdot \frac{\pi^{N(N+1)/4 - N(N-1)/4}}{\Gamma(1+N/2)\dots\Gamma(1+1/2)} \cdot N/2 \cdot \dots \cdot 1/2$$

$$= \frac{1}{2^{N/2} \cdot \pi^{N/2}} \cdot N! \cdot \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(1+N/2)\dots\Gamma(1+1/2)} = \frac{N!}{2^{N/2}\,\Gamma(1+N/2)\dots\Gamma(1+1/2)}$$

Odpovídá $\frac{1}{Z_{N,1}} = \frac{\Gamma(1+1/2)^N}{(2\pi)^{N/2}\,\Gamma(1+1/2)\dots\Gamma(1+N/2)}$

$$= \frac{(\sqrt{\pi}/2)^N}{(2\pi)^{N/2}\,\Gamma(1+1/2)\dots\Gamma(1+N/2)}$$

$\dots N!$