

Itô's integral

Bed' W Wienerův proces. Pak stochastická diferenciálka

$$\text{rovnice} \quad \begin{cases} dX = b(X, t)dt + B(X, t)dW \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

znamená, že hledáme proces $(X(t))_{t=0}^{\infty}$, který splňuje

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(X, s)ds + \int_0^t B(X, s)dW, \quad t \geq 0.$$

$$\bullet b, B \text{ dávej} \quad \bullet b(X, s) = b(X(s), s)$$

... musíme ovšem definovat $\int_0^T \dot{B} dW$

• Pro (hladkou) g jsme již definovali $\int_0^T g dW$

• Pro $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ a $0 \leq \lambda \leq 1$ definujeme

$$\tilde{t}_k = (1-\lambda)t_k + \lambda t_{k+1} \in [t_k, t_{k+1}].$$

$$R(\Delta, \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} W(\tilde{t}_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

... Riemannova suma k $\int_0^T W dW$

Pro $\lambda=0$ jsme viděli a pro obecní λ se ukáže podobně

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} R(\Delta, \lambda) = \frac{W(T)^2}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T$$

$$\lambda=0 \quad \dots \quad \int_0^T W dW = \frac{W^2(T)}{2} - \frac{T}{2} \quad \text{Itô's integral}$$

$$\lambda=\frac{1}{2} \quad \int_0^T W dW = \frac{W^2(T)}{2} \quad \dots \quad \text{Stratonovich integral}$$

Podle definice $\int_0^T G dW$... G bude záviset na W

-2-

... $G(t)$ bude záviset na $(W(s))_{s=0}^t$

... volíme $\lambda=0$!

- To, že $G(t)$ závisí jen na $(W(s))_{s=0}^t$ definujeme pomocí filtrací:

$$\mathcal{F}(t) = \sigma(W(s), 0 \leq s \leq t, X_0)$$

$G(t)$ je "nepředvídací proces" (nonanticipating process),
pokud $G(t)$ je $\mathcal{F}(t)$ -měřitelný pro všechna $t \geq 0$.

┌ ... Progresivně měřitelný:

$\forall t: [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definovaný jako $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$

└ je $\text{Borel}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -měřitelný ... silnější vlastnost

Definice: • $L^2(0, T)$... progresivně měřitelné náhodné procesy G s

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T G^2(t) dt \right) < +\infty$$

• $L^1(0, T)$... stejně s $\mathbb{E} \left(\int_0^T |G(t)| dt \right)$

Definice: • $G \in L^2(0, T)$ je po-částech konstantní (= jednoduchý, step process)

pokud ex. Δ s $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$

takové, že $G(t) \equiv G_k$ pro $t_k \leq t < t_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Ze G_k jsou $\mathcal{F}(t_k)$ -měřitelné náhodné veličiny

- Pak
$$\int_0^T G dW = \sum_{k=0}^{m-1} G_k (W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

Lemna: Pro $a, b \in \mathbb{R}$ a step-processes $G, H \in \mathbb{L}_*^2(0, T)$ platí -3-

$$i, \int_0^T (aG + bH) dW = a \int_0^T G dW + b \int_0^T H dW$$

$$ii, E \left(\int_0^T G dW \right) = 0$$

$$iii, E \left(\int_0^T G dW \right)^2 = E \left(\int_0^T G^2 dW \right)$$

Důkaz: i, ... společně s jmenovitelem a definicí

ii, G_k je nezávislá na $W(t_{k+1}) - W(t_k)$

$$E[G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))] = 0$$

$$iii, E \left(\int_0^T G dW \right)^2 = E \sum_{j,k=0}^{m-1} G_j G_k (W(t_{k+1}) - W(t_k)) (W(t_{j+1}) - W(t_j))$$

$$j < k \dots E[G_j G_k (W(t_{j+1}) - W(t_j))] \cdot \underbrace{E[W(t_{k+1}) - W(t_k)]}_{=0} = 0$$

$$\text{tedy } E \left(\int_0^T G dW \right)^2 = \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2 (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2)$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2) \underbrace{E(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2}_{t_{k+1} - t_k} = E \left(\int_0^T G^2 dW \right)$$

Rozšíření definice

-4-

- Pro $G \in L^2(0, T)$ existuje polaprost step-proces $G^m \in L^2(0, T)$ s

$$E \left(\int_0^T |G - G^m|^2 dt \right) \rightarrow 0$$

Outline: skoro jistě spojitá trajektorie $t \rightarrow G(t, \omega)$

$$G^m(t) := G(k/m), \quad k/m \leq t < \frac{k+1}{m}$$

$$\text{obecně } G^m(t) = \int_0^t m e^{m(s-t)} G(s) ds$$

a pak aproximujeme G^m jako drův

- $G \in L^2(0, T) \dots G_m^m$ ryše $E \left[\int_0^T (G^m - G^m) dW \right]^2 = E \int_0^T (G^m - G^m)^2 dt \xrightarrow{\rightarrow 0}$

$$\int_0^T G dW := \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T G^m dW \text{ existuje v } L^2(\Omega).$$

Pro toto rozšíření platí přechodí lemma

- $E \left(\int_0^T G dW \int_0^T H dW \right) = E \left(\int_0^T GH dW \right)$

$$2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$$

$$2E \left(\int_0^T G dW \int_0^T H dW \right) = E \left\{ \left(\int_0^T G dW + \int_0^T H dW \right)^2 - \left(\int_0^T G dW \right)^2 - \left(\int_0^T H dW \right)^2 \right\}$$

$$= E \int_0^T (G+H)^2 - G^2 - H^2 dW = 2E \int_0^T GH dW.$$

- Definice lze rozšířit i na $\int_0^T G^2 dt < \infty$ s.j.
 $G \in M^2(0, T)$

Prove that $X(r) = X(s) + \int_s^r F dt + \int_s^r G dW$, $F \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$, $0 \leq s \leq r \leq T$

rekursiv, z.B. $dX = F dt + G dW$... $0 \leq t \leq T$.

Vita (Itô's product rule) Necht

$$\left. \begin{aligned} dX_1 &= F_1 dt + G_1 dW \\ dX_2 &= F_2 dt + G_2 dW \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq T$$

$F_i \in \mathbb{L}^1(0, T)$, $G_i \in \mathbb{L}^2(0, T)$. Pak

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + \overbrace{G_1 G_2 dt}^{\text{Itô's correction term}}.$$

$$\Gamma X_1(r) X_2(r) - X_1(s) X_2(s) = \int_s^r X_2 dX_1 + \int_s^r X_1 dX_2 + \int_s^r G_1 G_2 dt$$

... per-partes

⊥

Dikar: 1. krok ... necht $X_1(0) = X_2(0) = 0$; $F_i(t) = F_i$, $G_i(t) = G_i$ nedávna
 F, G -ná $F(0)$ -úžitku' nat

Pak ($0 \leq r \leq T$) $X_i(t) = F_i t + G_i W_i(t)$

$$(\square) \int_0^r X_2 dX_1 + \int_0^r X_1 dX_2 + \int_0^r G_1 G_2 dt =$$

$$\int_0^r X_2 F_1 + X_1 F_2 dt + \int_0^r X_2 G_1 + X_1 G_2 dW + \int_0^r G_1 G_2 dt$$

$$= \int_0^r (F_1 t + G_1 W) F_2 + (F_2 t + G_2 W) F_1 dt + \int_0^r (F_1 t + G_1 W) G_2 + (F_2 t + G_2 W) G_1 dW + G_1 G_2 r$$

$$= F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + F_1 G_2) \left(\int_0^r W dt + \int_0^r t dW \right) + 2 G_1 G_2 \int_0^r W dW + G_1 G_2 r$$

Ukážeme $\int_0^r W dW = [W^2(r) - r]/2$

-6-

a $\int_0^r W dt + \int_0^r t dW = rW(r) \quad (*)$

operandu: $\int_0^r t dW = \sum_{k=0}^{m-1} t_k (W(t_{k+1}) - W(t_k))$

$\int_0^r W dt = \sum_{k=0}^{m-1} W(t_{k+1}) (t_{k+1} - t_k)$

secku: $\sum_{k=0}^{m-1} [W(t_{k+1}) t_{k+1} - W(t_k) \cdot t_k] = W(t_m) \cdot t_m = rW(r)$

$\Rightarrow (\square) = F_1 F_2 r^2 + (G_1 F_2 + F_2 G_1) rW(r) + G_1 G_2 [W^2(r) - r] + G_1 G_2 r$

$= (F_1 r + G_1 W(r))(F_2 r + G_2 W(r)) = X_1(r) X_2(r)$... formule pro $s=0$

$X_1(0) = X_2(0) = 0$

stejně i pro $s \geq 0$, $X_1(0), X_2(0)$ lib., F_i, G_i uer. nat.

F_i, G_i uer. nat

2. krok: Pro F_i, G_i ... skp-processes ... ukážeme na každém intervalu a secku

3. krok: Obecný případ $F_i^m \in \mathbb{L}^2(0, T), G_i^m \in \mathbb{L}^2(0, T)$ a

$E \left(\int_0^T |F_i^m - F_i|^2 dt \right) \rightarrow 0, E \left(\int_0^T |G_i^m - G_i|^2 dt \right) \rightarrow 0$

Definujeme $X_i^m(t) = X_i(0) + \int_0^t F_i^m(s) ds + \int_0^t G_i^m dW$

2. krok pro X_i^m na (s, r) & limita



Vita (Itô's chain rule)

-7-

Nechť X má stochastický diferenciál

$$dX = Fdt + GdW ; F \in \mathcal{L}^1(0, T), G \in \mathcal{L}^2(0, T).$$

Nechť $u: \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$ a její parc. derivace

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ existují a jsou spojité.}$$

Pak $Y(t) := u(X(t), t)$ má stoch. diferenciál

$$\begin{aligned} du(X, t) &= u_t dt + u_x dX + \frac{1}{2} u_{xx} G^2 dt \\ &= (u_t + u_x F + \frac{1}{2} u_{xx} G^2) dt + u_x G dW \end{aligned}$$

Důkaz: 1. krok: Začneme $u(x) = x^m$

$$m=0 \dots u \equiv 1 \dots Y \equiv 1 \dots dY = 0$$

$$m=1 \dots u = x \quad Y = X \dots dX = dY = 0 \cdot dt + 1 \cdot dX + 0 \cdot dt$$

$m=2 \dots$ z derivace součinu

$$d(X^2) = d(X \cdot X) = 2X dX + G^2 dW \dots u_x = 2X, u_{xx} = 2, u_t = 0$$

$$\text{Dále indukcí} \dots \text{Nechť } d(X^{m-1}) = \underline{(m-1)X^{m-2}dX} + \frac{1}{2}(m-1)(m-2) \cdot X^{m-3}G^2 dt$$

$$\text{Pak } d(X^m) = d(X \cdot X^{m-1}) = X d(X^{m-1}) + X^{m-1} dX + (m-1)X^{m-2}G^2 dt$$

$$\text{protože } (m-1)X^{m-2}dX = (m-1)X^{m-2}(Fdt + GdW)$$

$$\dots G_2 = (m-1)X^{m-2}G, G_1 = G$$

$$= X \left[\underline{(m-1)X^{m-2}dX} + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)X^{m-3}G^2 dt \right] + \underbrace{(m-1)X^{m-2}G^2 dt}_{+ X^{m-1}dX}$$

$$= mX^{m-1}dX + (m-1)X^{m-2}G^2 dt \left(\frac{m-2}{2} + 1 \right) = mX^{m-1}dX + \frac{1}{2}m(m-1)X^{m-2}G^2 dt$$

2. krok ... $u(x) = \text{polynom v } x \dots$ linearita

3. krok $u(x,t) = f(x)g(t)$, f, g polynomy

$$d(u(x,t)) = d(f(x)g(t))$$

$$= f(x)dg + gdf(x)$$

$$= f(x)g'(t)dt + g\left(f'(x)dx + \frac{1}{2}f''(x)G^2dt\right)$$

$$= u_t dt + u_x dx + \frac{1}{2} u_{xx} G^2 dt$$

4. krok ... tedy i pro $u(x,t) = \sum_{i=1}^m f^i(x)g^i(t)$, f^i, g^i polynomy

5. krok ... $u^m \rightarrow u$ vztah u_t^m, u_x^m a u_{xx}^m lokálně
stejněměrně na $\mathbb{R} \times [0, T]$

$$\text{Pak } u^m(X(r), r) - u^m(X(0), 0) = \int_0^r u_t^m + u_x^m F + \frac{1}{2} u_{xx}^m G^2 dt + \int_0^r u_x^m G dW_{s,j}$$

& $m \rightarrow \infty$

Věta: $dX^i = F^i dt + G^i dW$, $u: \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(u(X^1, \dots, X^n, t)) = u_t dt + \sum_{i=1}^n u_{x_i} dX^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j} G^i G^j dt$$