

## 2, Silná Markovská vlastnost

- Necht  $s > 0$  je první. Pak víme (Círcu'), že  $(W_{t+s} - W_s)_{t \geq 0}$  je opět Brownův pohyb. Stejně např. klád pro  $(X_{m+m} - X_m)_{m=0}^{\infty}$  náhodnou procházku na  $\mathbb{Z}$  ... plyne z Markovské vlastnosti  $W$ , resp.  $X$ .
- Někdy se může stát, že  $s > 0$  není první!  
 $\tau = \inf\{m \geq 0 : X_m = 10\}$  ... první čas, kdy  $(X_m)_{m=0}^{\infty}$  dosáhne hodnoty  $X_m = 10$   
 $(X_{m+\tau} - X_{\tau})_{m=0}^{\infty}$  ? je to opět náhodná procházka na  $\mathbb{Z}$ !!  
 ... vzhledem k náhodné procházce po dosažení hladi 10!!
- Odpověď: ANO
  - Záleží na definici času  $\tau$
  - Je nutná nějaká formalizace

Příklad:  $\tau = \inf\{m \geq 0 : X_m = 10\} - 1$

...  $(X_{m+\tau} - X_{\tau})_{m=0}^{\infty}$  není náh. procházka --  $X_1 = 1$ .

Definice: Necht  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  je měřitelný prostor. Systém  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  se nazývá filtrace, pokud

- $\forall t \geq 0: \mathcal{F}_t$  je  $\sigma$ -algebra
- $\forall s \geq t \geq 0: \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}$  ... neklesající

• Pro náhodný proces  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  definujeme "přirozenou filtraci"

$\tilde{\mathcal{F}}_t^X = \sigma(X_s: 0 \leq s \leq t)$  ... nejmenší  $\sigma$ -algebra,  
pro kterou jsou  $X_s, 0 \leq s \leq t$ , měřitelné

• Proces  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  je adaptovaný na filtraci  $\mathcal{F}$ , pokud je  $\forall t \geq 0: X_t$  měřitelná vzhledem k  $\mathcal{F}_t$ .

Příklad:  $W_t$  budíž standardní Brownův pohyb

$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} W(s)$  ... maximum  $W$  do času  $t$ .

Díky spojitosti trajektorií  $\{M(t) > a\} = \bigcup_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ 0 \leq s \leq t}} \{W(s) > a\}$   
 $\downarrow$   
 $\in \tilde{\mathcal{F}}_s \subset \tilde{\mathcal{F}}_t$   
 ... tedy  $\{M(t) > a\} \in \tilde{\mathcal{F}}_t$ .

• Definice "připustných časů"  $\tau$  ... To, jestli  $\tau = \pm\infty$ , resp.  $\tau \leq t$  musí záviset jen na  $X_s, 0 \leq s \leq t$

Definice: Nezáporná náhodná proměnná  $\tau$  (shodující se v  $[0, +\infty]$ )  
se nazývá "stopping time" vzhledem k filtraci  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ,

pokud  $\forall t \geq 0: \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

Stopping time se nazývá vlastní, pokud  $\tau < +\infty$  (a.e.) na  $\Omega$ .

Příklad:  $\tau(a) := \inf\{t \geq 0: W(t) = a\}$ ;  $\{\tau(a) \leq t\} = \{M(t) \geq a\}$  (spojitost)  
 $\in \mathcal{F}_t^W$

- $T_j = \inf\{n \geq 1: X_n = j\}$ ,  $X_n$  náh. procházka na  $\mathbb{Z}$ ,  $j \geq 1$   
 $\{T_j = n\} = \{X_1 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\}$  ... čas prvního průchodu  
 $= \{X_1 \neq j\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} \neq j\} \cap \{X_n = j\}$   
 -- stopping time

- čas posledního výskytu  $L^j = \sup\{n \geq 0: X_n = j\}$

obecně není stopping time --  $\{L^j = n\}$  závisí na  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$

Projdeme dvě verze "silni Markovské vlastnosti" - pro diskretuizace  
a pro Brownův pohyb

Silma' Markovska' vlastnost pro Markovskij' rutinec  $(X_m)_{m \geq 0}$  -27-

Věta: Necht  $(X_m)_{m \geq 0}$  je Markovskij' rutinec s maticí přechodu  $P$ .

Necht  $T$  je vlastní stopping time. Položme  $Y_m = X_{T+m}$ ,  $m \geq 0$ .

Pak, podmíněně z hlediska  $X_T = i$ ,  $(Y_m)_{m \geq 0} = (X_{T+m})_{m \geq 0}$

je Markovskij' rutinec s poč. rozdělením  $Y_0 = i$ , maticí přechodu  $P$  a uvažujme  $X_0, \dots, X_T$ .

Důkaz: Necht  $B$  je jiv určuj  $X_0, \dots, X_T$ . Pak  $B \cap \{T=m\}$  je určeno  $X_0, \dots, X_m$ ; tedy

$$\exists \mathcal{D}_{m+1} \subset \mathcal{S}^{m+1} : B \cap \{T=m\} = \{X_0, \dots, X_m\} \in \mathcal{D}_{m+1}.$$

$$\text{Pro } j_0 = i : \mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, \dots, X_{T+m} = j_m\} \cap B \cap \{T=m\} \cap \{X_T = i\})$$

$$= \mathbb{P}(\{X_m = j_0, X_{m+1} = j_1, \dots, X_{m+m} = j_m\} \cap \{X_0, \dots, X_m\} \in \mathcal{D}_{m+1} \cap \{X_m = i\})$$

$$= \mathbb{P}(\{X_m = j_0, \dots, X_{m+m} = j_m\} \mid \{X_0, \dots, X_m\} \in \mathcal{D}_{m+1} \cap \{X_m = i\})$$

$$\cdot \mathbb{P}(\{X_0, \dots, X_m\} \in \mathcal{D}_{m+1} \cap \{X_m = i\})$$

$$= \mathbb{P}(X_m = j_0, \dots, X_{m+m} = j_m \mid X_m = i) \cdot \mathbb{P}(\{X_0, \dots, X_m\} \in \mathcal{D}_{m+1} \cap \{X_m = i\})$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = j_0, \dots, X_m = j_m) \cdot \mathbb{P}(B \cap \{T=m\} \cap \{X_T = i\})$$

Sečeme pro  $m = 0, 1, 2, \dots$  a vydělíme  $\mathbb{P}(X_T = i)$

$$\frac{\mathbb{P}(\{X_T = j_0, \dots, X_{T+m} = j_m\} \cap B \cap \{X_T = i\})}{\mathbb{P}(X_T = i)} = \mathbb{P}(X_T = j_0, \dots, X_{T+m} = j_m \mid X_T = i)$$

$$\mathbb{P}(X_0 = j_0, \dots, X_m = j_m) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(B \cap \{T=m\} \cap \{X_T = i\})}{\mathbb{P}(X_T = i)} =$$

$$= \mathbb{P}(X_0=j_0, \dots, X_m=j_m) \cdot \frac{\mathbb{P}(B \cap \{X_T=i\})}{\mathbb{P}(X_T=i)}$$

$$= \mathbb{P}(X_0=j_0, \dots, X_m=j_m) \cdot \mathbb{P}(B | X_T=i)$$

- Celkem tedy:  $Y_0=i$  a  $\mathbb{P}(Y_0=i, Y_1=j_1, \dots, Y_m=j_m \cap B) =$

$$= \mathbb{P}(X_0=i, X_1=j_1, \dots, X_m=j_m) \cdot \mathbb{P}(B | X_T=i)$$

... Řetězec  $Y$  má stejnou matici přechodu jako  $X$  a je nezávislý na jivech generovaných  $(X_0, \dots, X_T)$ .

Silná Markovská vlastnost pro Brownův pohyb

- nezávislý jery:  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$
- nezávislé  $\sigma$ -algebry  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ :  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$  pro  $\forall A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2$
- náhodná proměnná  $X$  nezávislá na  $\mathcal{F}$ :  $\mathbb{P}(X^{-1}(B) \cap F) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) \cdot \mathbb{P}(F)$   
 $\forall B \subset \mathbb{R}, \forall F \in \mathcal{F}$

...  $\mathcal{F}$  &  $\sigma$ -algebra generovaná  $X$  jsou nezávislé

Definice: Necht  $T$  je stopping time vzhledem k  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(t))_{t \geq 0}$

Pak  $\mathcal{F}(T) := \{A : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}(t) \mid \forall t \geq 0\}$

Věta: Necht  $(W_t)_{t \geq 0}$  je Wienerův proces a  $T$  je vlastní stopping time.

Pak  $\{W_{T+t} - W_T\}_{t \geq 0}$  je opět Wienerův proces spuštěný v nule a nezávislý na  $\mathcal{F}(T)$ .