

1. Náhodný procesy

-1-

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - pravděpodobnostní prostor
- I ... neprázdná množina ... typicky $I \subset \mathbb{R}$

Definice: Systém náhodných veličin $\{X_t: t \in I\}$ nazýváme náhodným procesem na I .

- Značení: $\{X_t: t \in I\} = (X_t)_{t \in I} = (X(t))_{t \in I}$
- $\forall t \in I$ je X_t náhodná veličina, tedy $X_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná
- lze zobecnit ... pro $(E, \mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ je σ -algebra na E , $X_t: \Omega \rightarrow E$ pro každé $t \in I$
... E -hodnotový náhodný proces
- Pokud je E metrický (nebo topologický) prostor, obvykle volíme E jako Borelovu σ -alg. (nebo σ -algebru obsahující otevřené množiny!)
(Elementární) příklady: 1, $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $X_t = \begin{cases} 1 & \text{s p. } 1/2 \\ 0 & \text{s p. } 1/2 \end{cases}$ nezávislé
... nebo jakýkoliv jiný vektor nezávislých náh. proměnných
2, $I = \mathbb{N}_0$, $X_0 = 0$, $X_m = \sum_{j=1}^m S_j$, kde $S_j = \begin{cases} +1 & \text{s p. } 1/2 \\ -1 & \text{s p. } 1/2 \end{cases}$
... náhodná procházka na $\mathbb{Z}$

3, Pro $\theta \in \mathbb{R}$ první a pro $Y, Z \sim N(0, 1)$ nezávislé bud
 $X(t) = Y \cos(\theta t) + Z \sin(\theta t)$

4, Pro $\{Z_m\}_{m=0}^{\infty}$ nezávislých náh. proměnných

pro $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ položíme $X_m = \sum_{i=0}^n \alpha_i Z_{m-i}$,

resp. $X_m = \sum_{i=0}^{\min(m,n)} \alpha_i Z_{m-i}$... klouzavý průměr

Pravidla pro vlastnosti charakteristik náh. procesy

- Pro náh. veličiny $(X_t)_{t \in I}$ můžeme spočítat střední hodnotu, korelaci, ...

Definice: • Bud' $(X_t)_{t \in I}$ (komplexní) náhodný proces s konečnou střední hodnotou ($\forall t: E|X_t| < +\infty$). Funkce

$\mu: I \rightarrow \mathbb{C}$, $\mu_t = \mu(t) = EX_t$ nazýváme střední hodnotou X .

- Je-li $\mu \equiv 0$, pak X nazýváme centrováný.

- Pokud má X konečné druhé momenty ($\forall t \in I: EX_t^2 < +\infty$),

pak funkci $C_X: I \times I \rightarrow \mathbb{C}$, $C_X(s, t) = E[(X_s - \mu_s)(\overline{X_t - \mu_t})]$

nazýváme autokovarianční funkcí procesu X .

- Stejně tak $R_X(s, t) = E[X_s \overline{X_t}]$ je autokorelační funkce a $C_X(t, t)$ se nazývá "rozptyl v čase t ".

Vlastnosti: 1, Platí Cauchy-Schwarzova nerovnost

$$|R_X(s, t)| \leq \sqrt{R_X(s, s)} \cdot \sqrt{R_X(t, t)}$$

2, R_X, C_X jsou tzv. ^{selvi}poz. definitní funkce, tedy

$$\forall m: \forall \{t_1, \dots, t_m\} \subset I, \forall \alpha \in \mathbb{C}^m \text{ platí } \sum_{j,k=1}^m \alpha_j C_X(t_j, t_k) \bar{\alpha}_k \geq 0$$

$$\text{Opravdu: } \sum_{j,k=1}^m \alpha_j C_X(t_j, t_k) \bar{\alpha}_k = \sum_{j,k=1}^m \alpha_j E[(X_{t_j} - \mu_{t_j})(\overline{X_{t_k} - \mu_{t_k}})] \bar{\alpha}_k$$

$$= E \left\{ \sum_{j,k=1}^m \alpha_j (X_{t_j} - \mu_{t_j}) \bar{\alpha}_k (\overline{X_{t_k} - \mu_{t_k}}) \right\} = E \left| \sum_{j=1}^m \alpha_j (X_{t_j} - \mu_{t_j}) \right|^2 \geq 0$$

Tedy matice $(C_X(t_j, t_k))_{j,k=1}^m$ je poz. semidefinitní.

$$3, R_X(t, s) = \overline{R_X(s, t)}, C_X(s, t) = \overline{C_X(t, s)}$$

4, lze ukázat, že pro každou $\mu: I \rightarrow \mathbb{C}$ a pro každou poz. semidef. funkci

$C: I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ existuje náh. proces takový, že μ a C jsou jeho střední hodnota a autokovarianční funkce.

Koneční rozměrná' rozdělení' náhodného procesu

- Uvažujme $\{t_1, \dots, t_m\} \subset I$ a náhodný proces $(X_t)_{t \in I}$ s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$. Pak $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ je náhodný vektor z $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ do E^m .

Pro $E = \mathbb{R}$ definiujeme

$$F_{t_1, \dots, t_m}(c_1, \dots, c_m) := \mathbb{P}(X_{t_1} \leq c_1, \dots, X_{t_m} \leq c_m) \dots = \mathbb{P}\{\omega: X_{t_1}(\omega) \leq c_1, \dots, X_{t_m}(\omega) \leq c_m\}$$

Díkem (k. má pak teoretické měřenie v praxi):

- Nejprve definiujeme $(E^m, \mathcal{E}^m)$

$$E^m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in E\}; \quad \mathcal{E}^m = \sigma\left(\prod_{i=1}^m B_i : B_i \in \mathcal{E}\right)$$

↑
nejm. σ -algebra nad systémem v danosti.

- Chceme ukázat, že $(X_{t_1}, \dots, X_{t_m})$ je měřitelná, tj. $\forall B \in \mathcal{E}^m$

$$\text{platí } (X_{t_1}, \dots, X_{t_m})^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

- Pro ten účel definiujeme $\Sigma := \{C \in \mathcal{E}^m : (X_{t_1}, \dots, X_{t_m})^{-1}(C) \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{E}^m$

- Σ je σ -algebra jednoduché, pracuji ... d.ú.

$$\begin{aligned} & \bullet B_i \in \mathcal{E}, C := \prod_{i=1}^m B_i \dots \text{pak } (X_{t_1}, \dots, X_{t_m})^{-1}\left(\prod_{i=1}^m B_i\right) = \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_m}(\omega)) \in \prod_{i=1}^m B_i \right\} = \\ &= \left\{ \omega \in \Omega : X_{t_1}(\omega) \in B_1, \dots, X_{t_m}(\omega) \in B_m \right\} \\ &= \bigcap_{i=1}^m \left\{ \omega : X_{t_i}(\omega) \in B_i \right\} = \bigcap_{i=1}^m \underbrace{X_{t_i}^{-1}(B_i)}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Σ je σ -algebra, která obsahuje generátor $\mathcal{E}^m$. $\mathcal{E}^m$ je nejmenší s touto vlastností
 $\Rightarrow \mathcal{E}^m \subset \Sigma$.

Systém funkcí

$$F_{t_1, \dots, t_m}(c_1, \dots, c_m) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq c_1, \dots, X_{t_m} \leq c_m)$$

"konečně rozměrné" distribuční funkce náh. procesu X k časům $(t_1, \dots, t_m)$ v bodech $(c_1, \dots, c_m)$.

• Pokud ex. připsuší par. derivace

$$f_{t_1, \dots, t_m}(c_1, \dots, c_m) := \frac{\partial^m}{\partial x_1 \dots \partial x_m} F_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m) \Big|_{x_1=c_1, \dots, x_m=c_m}$$

- konečné rozměrné hustoty

Platí • symetrie $F_{t_1, t_2}(c_1, c_2) = F_{t_2, t_1}(c_2, c_1)$

obecně $F_{t_1, \dots, t_m}(c_1, \dots, c_m) = F_{t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(m)}}(c_{\pi(1)}, \dots, c_{\pi(m)})$
 $\forall \pi \dots$ permutace na $\{1, \dots, m\}$

• konzistence - $\lim_{c_2 \rightarrow +\infty} F_{t_1, t_2}(c_1, c_2) = F_{t_1}(c_1)$

obecně $\lim_{c_i \rightarrow +\infty} F_{t_1, \dots, t_m}(c_1, \dots, c_m) = F_{t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_m}(c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_m)$.

Naopak každý systém funkcí, který je symetrický a konzistentní ("konzistentní systém distribučních funkcí") odpovídá nějakému procesu

Věta (Daniell-Kolmogorov - 1933): Bud' I neprázdná a

$\{F_{t_1, \dots, t_m} : \{t_1, \dots, t_m\} \subset I\}$ konzistentní systém distribučních funkcí

Pak existuje $\mathbb{P}$ -prav. míra na $(\mathbb{R}^I, \mathcal{K}(\mathbb{R}^I))$ $\dots \mathbb{R}^I = \{f : f \text{ je funkce z } I \text{ do } \mathbb{R}\}$
 $\mathcal{K}(\mathbb{R}^I) \dots$ Kolm. σ -algebra

taková, že $X_t(\omega) = X_t(\omega(\cdot)) = \omega(t)$ splňuje

$\mathbb{P}(\omega : X_{t_1}(\omega) \leq c_1, \dots, X_{t_m}(\omega) \leq c_m) = F_{t_1, \dots, t_m}(c_1, \dots, c_m) \dots$ bodůvzoru

Wienerův proces

-1-

Definice: Náhodný proces $W = (W_t)_{t \geq 0}$ je Wienerův proces, pokud platí 1, $W_0 = 0$ a.j.

2, Má nezávislé přírůstky, tj.

$$\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \text{ jsou}$$

$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$ nezávislé náhodné veličiny

3, Má stacionární přírůstky, tj.

$$W_{t+h} - W_s \sim W_t - W_s \dots W_t - W_s \text{ závisí jen na } t-s > 0$$

$$\text{konkrétně } W_t - W_s \sim N(0, \sigma^2(t-s)) \text{ pro } t > s$$

Poznámky: 1, Proces s nezávislými stac. přírůstky se nazývá Lévyho proces.

2, Pro $\sigma = 1$: standardní Wienerův proces

3, Existence - a Damiell-Kolmogorovův vz.

4, Brownův pohyb - "spojitá verze" Wienerova procesu

↙ Funkce $t \rightarrow X_t(\omega)$ pro $\omega \in \Omega$ první - trajektorie procesu X

Existuje proces $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{t \geq 0}$ tak, že $t \rightarrow \tilde{W}_t(\omega)$ je spojitá funkce na $[0, \infty)$ pro p.v. $\omega \in \Omega$

$$\forall t \geq 0: \mathbb{P}(W_t = \tilde{W}_t) = 1 \quad \dots \text{"verze"}$$

$\dots \tilde{W}$ je "Brownův pohyb".

Wienerův proces jako limita náhodných procházek

-2-

- pro reálné parametry $\varepsilon, \delta > 0$ uvažujeme náhodnou procházku, která za čas $\delta > 0$ se pohne o $\pm \varepsilon$ náhodně
- $X^{\delta, \varepsilon}(m\delta) = \sum_{j=1}^m \xi_j$, kde $\xi_1, \xi_2, \dots = \pm \varepsilon$ jsou nezávislé
($\mathbb{P} = 1/2$)
- Pak $E X^{\delta, \varepsilon}(m\delta) = 0$, $\text{Var}[X^{\delta, \varepsilon}(m\delta)] = m \text{Var} \xi_1 = m \varepsilon^2$
- Pro $m\delta \leq t$ dále $X^{\delta, \varepsilon}(t) = X^{\delta, \varepsilon}(m\delta)$
... počítáme konstantní trajektorii
- Chceme pro $m \rightarrow \infty$ volit $\delta = \delta(m)$ a $\varepsilon = \varepsilon(m)$ tak, aby existovala
lim $\dots$ a byla rovna $W \dots \sigma = 1$
 $m \rightarrow \infty$

$$\text{Volíme } \delta_m = 1/m \quad \dots \quad \text{Var}(X^{\delta_m, \varepsilon_m}(m\delta_m)) = m \varepsilon_m^2$$

$$\text{Var}(X^{\delta_m, \varepsilon_m}(1)) \xrightarrow{?} \text{Var}(W_1) = 1$$

$$\text{Tedy } \varepsilon_m = \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$\text{Celkem definujeme } W_m(t) = \sum_{1 \leq k \leq L_m + 1} \xi_k / \sqrt{m}, \quad \xi_k = \pm 1 \text{ nezávislé.}$$

-- Bůhův výsledek konvergence? Bůhův vlastnosti a uvaž. procházky
na W ?

Vŕsta: Bud' W standardnŭ Wienerov proces. Pak platŭ

-3-

1, W je gaussovskŭ (vŕechua jeho koneuŭdnŭm. rozdŕbenŭ jŕou gaussovŭ

a platŭ $\mu = \mathbb{E} W_t = 0$ (caurovanŭ)

a $C_W(s, t) = \min(s, t), s, t \geq 0$

2, koneuŭdnŭm hustotŭ jŕou tvaru

$$f_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m) = \prod_{j=1}^m f_{t_j - t_{j-1}}(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{t}\right)$$

$t_0 = 0, x_0 = 0$

Pŭkas: $x_0 = 0, x_0 = 0; \mu_t = \mathbb{E} W_t = 0 = \mathbb{E}(W_t - W_0) \dots W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

$$\bullet \mathbb{Q}_W(s, t) = C_W(s, t) = \mathbb{E}[W_s W_t] = \mathbb{E}[(W_t - W_s) W_s] + \mathbb{E} W_s^2 = s = \min(s, t)$$

$s \leq t$ $\downarrow \downarrow$
nezamŕnŭdŭ

• Chceme ukŕpat, ŕe $(W_{t_1}, \dots, W_{t_m})$ je gaussovskŭ & spouŕtat hustotu

$$\begin{pmatrix} W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_m} \end{pmatrix} = Z_m = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 1 & \dots & & 1 \end{pmatrix}}_{A_m} \underbrace{\begin{pmatrix} W_{t_1} - W_{t_0} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_m} - W_{t_{m-1}} \end{pmatrix}}_{Y_m}$$

$$\mathbb{P}(Z_m \in B) = \mathbb{P}(A_m Y_m \in B) = \mathbb{P}(Y_m \in A_m^{-1} B) = \int_{A_m^{-1} B} f_{Y_m}(y) dy =$$

$z = A_m y, y = 1$
 $\downarrow dz = \det A_m dy$

$$= \int_B f_{Y_m}(A_m^{-1} z) dz \quad \dots f_{Z_m} = f_{Y_m} \circ A_m^{-1} \quad \dots A_m^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & & \\ 0 & -1 & 1 & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_m^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - z_0 \\ z_2 - z_1 \\ \vdots \\ z_m - z_{m-1} \end{pmatrix}; f_{Y_m}(y) = \prod_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_j - t_{j-1})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y_j^2}{t_j - t_{j-1}}\right); f_{Z_m}(z) = f_{Y_m}(A_m^{-1} z) =$$

$$= \int \prod_{j=1}^n (z_j - z_{j-1}) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{t_j - t_{j-1}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(z_j - z_{j-1})^2}{t_j - t_{j-1}}\right). \quad -4-$$

Markovská vlastnost

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ (na I je uspořádání). Pohod pro káďe'

$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$, $\{t_0, t_1, \dots, t_m\} \subset I$ platí'

$$\mathbb{P}(X_{t_m} \in A | X_{t_{m-1}}, \dots, X_{t_1}, X_{t_0}) = \mathbb{P}(X_{t_m} \in A | X_{t_{m-1}}) \quad (\text{pro každou měřitelnou } A)$$

Pak říkáme, že X je Markovský proces.

Věta: Bud' W standardní Wienerův proces. Pak platí'

1, $\forall t \geq 0 \forall 0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_m$ platí'

$(W_{t+h_1} - W_t, \dots, W_{t+h_m} - W_t)$ je nezávislé na $(W_s)_{s \leq t}$.

2, Pro $t_0 \geq 0$ libovolně je $(\tilde{W}_t)_{t \geq 0} = (W_{t+t_0} - W_{t_0})_{t \geq 0}$

opět standardní Wienerův proces.

(restartovaný Wienerův proces v čase t_0)

Důkaz: 1, Z definice ... $W_{t+h_1} - W_t$ je nezávislé na $W_s - W_0$

$0 \leq s \leq t \leq t+h_1$

2, Ověříme podmínky z definice

- $\tilde{W}_0 = W_{t_0} - W_{t_0} = 0$

- $(\tilde{W}_{t_1} - \tilde{W}_0, \tilde{W}_{t_2} - \tilde{W}_{t_1}, \dots, \tilde{W}_{t_m} - \tilde{W}_{t_{m-1}}) =$

$$= (W_{t_1+t_0} - W_{t_0}, W_{t_2+t_0} - W_{t_1+t_0}, \dots, W_{t_m+t_0} - W_{t_{m-1}+t_0})$$

... nezávislé přírůstky W

- $\tilde{W}_t - \tilde{W}_s = W_{t_0+t} - W_{s+t_0} \sim \mathcal{N}(0, t-s).$

1, Pro $Y_m = (W_{t+h_1} - W_t, W_{t+h_2} - W_{t+h_1}, \dots, W_{t+h_m} - W_{t+h_{m-1}})^T$ a

$Z_m = (W_{t+h_1} - W_t, \dots, W_{t+h_m} - W_t)$ je opit $Z_m = A_m Y_m$; $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Y_m jsou nezávislé na $(W_s)_{s \leq t}$, tedy i Z_m je nezávislé na $(W_s)_{s \leq t}$. $\square$

... dokázali jsme vlastně, že $T=t_0$ je stopping time a se
pro $T=t_0$ splývá s ilu a klasická Markovská vlastnost.

• Čas prvního dotyku

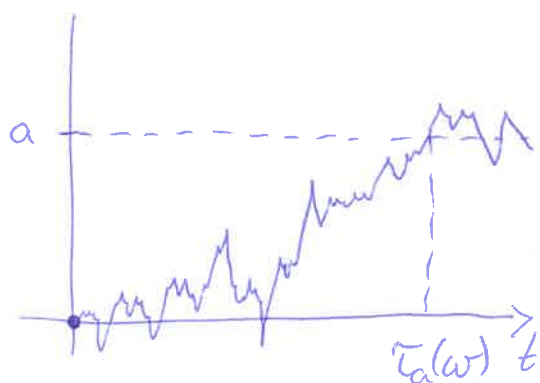
• $\omega \in \Omega$ první: $t \rightarrow W_t(\omega)$ -- trajektorie

• Bud' $a > 0$ první: $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : W_t \geq a\} \in [0, \infty]$

čas prvního dotyku úrovně a

(first time passage, hitting time)

τ_a -- náhodná veličina



Věta: Náhodná veličina τ_a má hustotu pravděpodobnosti:

$$f_{\tau_a}(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi} x^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right), x \geq 0$$

Levyho distribuce
Waldova distribuce

Dúkaz: • Polárne $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s, t \geq 0$... dobre definovaná
maximum do času t

• Porovnávanie: $\{\omega: \tau_a(\omega) > t\} = \{\tau_a > t\} = \{M_t < a\} = \{\omega: M_t(\omega) < a\}$

$$\bullet \{\tau_a \leq t\} = \{M_t \geq a\}$$

$$\bullet F_{\tau_a}(t) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t) = \mathbb{P}(M_t \geq a) = \underbrace{\mathbb{P}(M_t \geq a \text{ \& } W_t \leq a)}_{I_1} + \underbrace{\mathbb{P}(M_t \geq a \text{ \& } W_t \geq a)}_{II_1}$$

ad II_1 : $W_t \geq a \Rightarrow M_t \geq a$... $II_1 = \mathbb{P}(W_t \geq a)$

ad I_1 : $\tilde{W}_s = W_{s+\tau_a} - W_{\tau_a}$ je opäť Wienerov proces
(silná Markovská vlastnosť)
& nezávislý na $W_s, 0 \leq s \leq \tau_a$

$$W_{\tau_a} = a$$

$$\mathbb{P}(M_t \geq a, W_t \leq a) = \mathbb{P}(M_t \geq a, W_t - W_{\tau_a} \leq 0) =$$

$$= \mathbb{P}(\tau_a \leq t, W_t - W_{\tau_a} \leq 0) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t, W_t - W_{\tau_a} \geq 0)$$

$$= \mathbb{P}(M_t \geq a, W_t \geq a) = II_1 = \mathbb{P}(W_t \geq a)$$

$$\text{Celkom: } F_{\tau_a}(t) = 2\mathbb{P}(W_t \geq a) = 2 \int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx = \left[\begin{array}{l} y = \frac{x}{\sqrt{2t}} \\ dy = \frac{dx}{\sqrt{2t}} \end{array} \right]$$

$$= 2 \int_{a/\sqrt{2t}}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-y^2) dy$$

$$\text{Konečne } f_{\tau_a}(t) = \frac{d}{dt} F_{\tau_a}(t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1/2}{t^{3/2}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right)$$

$t > 0. \blacksquare$

Pracímky: • Reflektovaný Wienerův proces

$$\tilde{W}_t(\omega) = \begin{cases} W_t(\omega), & t \leq \tau_a(\omega) \\ a - (W_t(\omega) - a), & t > \tau_a(\omega) \end{cases}$$

- lze ukázat, že je opět Wienerův proces



$$\bullet \mathbb{P}(\tau_a \leq t) = 2\mathbb{P}(W_t > a) = \mathbb{P}(|W_t| > a) = \mathbb{P}(|N_t| \geq a)$$

$$\bullet W_t \sim \mathcal{N}(0, t) \quad \dots \quad \mathbb{P}(\tau_a \leq t) = 2\mathbb{P}(W_t > a) = 2\mathbb{P}(\sqrt{t} Z > a) = 2\mathbb{P}(Z > a/\sqrt{t})$$

$$t \rightarrow +\infty \quad \dots \quad \mathbb{P}(\tau_a < +\infty) = 2\mathbb{P}(Z > 0) = 1 \quad \dots \quad \tau_a < +\infty \text{ skoro jistě}$$

$$\bullet E\tau_a = \int_0^\infty \underbrace{x \frac{a}{\sqrt{2\pi} x^{3/2}}}_{\sim x^{-1/2}} \underbrace{e^{-a^2/2x}}_{\rightarrow 1} dx = +\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

┐ Variace funkce

Vlastnosti trajektorii

- existují spojité křivky

Variace funkce : $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, t \geq 0$. Obzvláště

$$\Delta_t^m = \{t_i^{(m)} : 0 = t_0^{(m)} < t_1^{(m)} < \dots < t_m^{(m)} = t\}$$

dělení intervalu $[0, t]$. Norma dělení je

$$\|\Delta_t^m\| := \max_{1 \leq i \leq m} |t_i^{(m)} - t_{i-1}^{(m)}| \quad \dots = \max_{1 \leq i \leq m} |t_i - t_{i-1}|$$

Definice : Někdy pro každou posloupnost dělení $(\Delta_t^m)_{m \in \mathbb{N}}$ intervalu $[0, t]$ takovou, že $\|\Delta_t^m\| \rightarrow 0$, existují konečná lim $\sum_{t_i \in \Delta_t^m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p$, $\|\Delta_t^m\| \rightarrow 0$

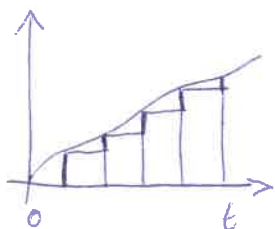
$p > 0$. Pak říkáme, že funkce f má na intervalu $[0, t]$ konečnou

p -variace; označme $V_t^p(f)$... společná hodnota těchto limit.

Speciálně : $p=1 \Rightarrow V_+^1(f)$ se nazývá totální variace funkce, $\|f\|_{[0, t]}$

$$\|f\|_{[0, t]} = \sup_{m, \Delta_t^m} \sum_{t_i \in \Delta_t^m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Význam totální variace



... $\|f\|$, dráha projekce bodu $(x, f(x))$ na y -souřadnici

$$\text{Pro } f \in C^1 : \sum_{t_i \in \Delta_t^m} \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} \cdot |t_i - t_{i-1}| \rightarrow \int_0^t |f'(s)| ds$$

... rovněž poléhá grafu funkce : $\int_0^t \sqrt{1 + f'(s)^2} ds$
proj. na osu x

Konvergence ve statistice

-27-
1.11.2017

- Necht $(X_m)_{m \geq 0}$ je posloupnost náhodných proměnných. Řekneme, že X_m konverguje k X v pravděpodobnosti; $X = \mathbb{P}\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} X_m$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$: $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_m - X| > \varepsilon) = 0$
- Konvergence skoro jistě: $\mathbb{P}(\lim_{m \rightarrow \infty} X_m = X) = 1$
- Konvergence v L_p -normě: $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}|X_m - X|^p = 0$

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{L_2} & \Rightarrow & \xrightarrow{L_1} \\ & & \Downarrow \\ \xrightarrow{\text{a.e.}} & \Rightarrow & \xrightarrow{\mathbb{P}} \end{array}$$

Definice: Bud' $(X_t)_{t \geq 0}$ náhodný proces a necht' pro každou posl. dělení $(\Delta_t^m)_{m \in \mathbb{N}}$, $\|\Delta_t^m\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ intervalu $[0, t]$ existuje limita

$$\langle X \rangle_t := \mathbb{P}\text{-}\lim_{\|\Delta_t^m\| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \Delta_t^m} |X(t_i) - X(t_{i-1})|^2$$

Tato limita se nazývá kvadratická variace $(X_t)_{t \geq 0}$,
neboli $\langle X \rangle = (\langle X \rangle_t)_{t \geq 0}$.

Věta: Bud' W standardní Wienerův proces. Pak $\langle W \rangle_t = t$, $\forall t \geq 0$.

Důkaz: Z L_2 -konvergence plyne $\mathbb{P}$ -konvergence

$$\text{Stejně tedy } \mathbb{E} \left| \sum_{t_i} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 - t \right|^2 \xrightarrow{\|\Delta_t^m\| \rightarrow 0} 0$$

$$\sum_{t_i} (t_i - t_{i-1})$$

$$\text{Tedy: } E \left| \sum_{t_i} \left\{ |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 - \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{=E|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2} \right\} \right|^2 = \left| Y_i := |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 \right|$$

$$= E \left| \sum_{i=1}^n (Y_i - E Y_i) \right|^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^n E (Y_i - E Y_i)^2}_{I_1} + 2 \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} E [(Y_i - E Y_i)(Y_j - E Y_j)]}_{I_2} \quad (*)$$

Dále upravíme

$$I_1 = \sum_i E [Y_i^2 - 2Y_i E Y_i + (E Y_i)^2] = \sum_i E [Y_i^2] - [E Y_i]^2$$

$$W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \simeq \sqrt{t_i - t_{i-1}} \cdot Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$Y_i \simeq (t_i - t_{i-1}) Z_i^2$$

$$= \sum_i (t_i - t_{i-1})^2 E [Z_i^4] - (t_i - t_{i-1})^2 [E Z_i^2]^2 = \sum_i (t_i - t_{i-1})^2 \{3 - 1\} = \sum_i 2(t_i - t_{i-1})^2$$

$$I_2, Y_i, Y_j \text{ jsou nezávislé} \Rightarrow E [(Y_i - E Y_i)(Y_j - E Y_j)] = E (Y_i - E Y_i) \cdot E (Y_j - E Y_j) = 0$$

$$\text{Celkem } (*) = 2 \sum_i (t_i - t_{i-1})^2 \leq 2 \|\Delta_t^n\| \underbrace{\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})}_= t = 2t \|\Delta_t^n\| \xrightarrow{\|\Delta_t^n\| \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Tedy } L^2\text{-lim } \sum_{t_i} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 = t, \text{ tedy: } \mathbb{P}\text{-lim.}$$

Důsledek: $\|W\|_{[0, t]} = +\infty$ skoro jistě.

Děkuj: sporem: Necht $\|W\|_{[0, t]} < +\infty$

$$\text{pak } \sum_i |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 \leq \underbrace{\sup_i |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|}_{\downarrow} \cdot \underbrace{\sum_i |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|}_{\leq \|W\|_{[0, t]}}$$

pro $\|\Delta_t^n\| \rightarrow 0$... stejnoměrná spojitost trajektorie $(W_t)_{t \geq 0}$

$\hookrightarrow$ Pro trajektorie $\|W\|_{[0, t]} < +\infty$ platí lim $\sum_{i=1}^n |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 = 0$
 $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\Delta_t^n\| \rightarrow 0} i \in \mathbb{N}$

Náhodní procesy, p-Variace Brownova pohybu

• Víme: $\mathbb{P}$ -lim $\sum_{t_i \in \Delta_t^m} |X(t_i) - X(t_{i-1})|^2 \rightarrow t$ pro $X=W$
 $\|\Delta_t^m\| \rightarrow 0$

• $\sum_{i=1}^n |W(t_i) - W(t_{i-1})|^2 \leq \sup |W(t_i) - W(t_{i-1})| \cdot \sum_{i=1}^n |W(t_i) - W(t_{i-1})|$

W má p.j. spojit* trajektorie ... na $[0, t]$ jsou tedy

i stygmizní spojit* $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |s - t| < \delta \Rightarrow |W_s - W_t| < \varepsilon$

... pro $\|\Delta_t^m\| \leq \delta \Rightarrow \sup |W(t_i) - W(t_{i-1})| < \varepsilon$

LHS $\rightarrow t$, $\sup \rightarrow 0$... $\sum_{i=1}^n |W(t_i) - W(t_{i-1})| \leq \|W\|_{[0, t]} < +\infty$

vede ke sporu

• pro $1 < p < 2$ - stejně:

$$\sum_{i=1}^n |W(t_i) - W(t_{i-1})|^2 \leq \left(\sup |W(t_i) - W(t_{i-1})| \right)^{2-p} \sum_{i=1}^n |W(t_i) - W(t_{i-1})|^p$$

$\downarrow$
 $\text{omezení?} \Rightarrow \text{spor}$

Záver $||W||_{[0,t]} = +\infty$ skoro jisti má nepriznanú dĺžku!

↳ nemôžeme suadno definovať integrál Wienerova procesu
 $\int_0^t f(s) dW_s$

• Má-li funkcia konečnou variáciu, pak lze definovat

• Riemann - Stieltjesův integrál

$$\int_a^b f dg(x) : \text{sumy } \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

$t_{i-1} < \xi_i < t_i$

• Lebesgue - Stieltjesův integrál

$$\int_a^b f dg(x) :$$

• Funkcia konečnou variácií lze upravit jako
~~a~~ rozdíl dvou monotónních (neklesajících)
 funkcí ... $g(x) = g_+(x) - g_-(x)$

$$\mu_g^+([s, t]) = g_+(t) - g_+(s) \geq 0$$

$$\mu_g^-([s, t]) = g_-(t) - g_-(s) \geq 0 \text{ dvojnásob. úměry}$$

$$\int_a^b f dg(x) = \int_a^b f d\mu_g^+(x) - \int_a^b f d\mu_g^-(x).$$

Další vlastnosti wienerovské trajektorie

1, Wienerovské trajektorie skoro jisti nejsou diferencovatelné
 řádekem bodě $t \geq 0$.

$$\dots \frac{W_{t+h} - W_t}{h} \sim N(0, \frac{1}{h}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \dots \text{lim. neexistuje}$$

2, Trajektorie nejsou monotónní na žádném intervalu $[t, t+\varepsilon)$

3, Na každém intervalu $[t, t+\varepsilon)$ nekonečněkrát mění znaménko.

Vita (bez diskuse) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{W_t}{t} = 0$, $\mathbb{P}$ -s.j.

Wienerův proces s driftem

Definice: Mějme $(W_t)_{t \geq 0}$ standardní W.p., $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Položme $\tilde{Y}_t = \mu t + \sigma W_t$, $t \geq 0$. Pak $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$ nazýváme

Wienerův proces s driftem.

Platí: $E \tilde{Y}_t = \mu t$, $\text{Var } \tilde{Y}_t = \sigma^2 t$, $\tilde{Y}_0 = 0$ skoro jistě.

- $\tilde{Y}_t$ je gaussianový proces
- limita nesymetrické náhodné procházky
- σ : "difúzní koeficient"

• Lévyho konstrukce Brownova pohybu

1920: Wiener - existence Wienerova procesu pomocí L_2 -teorie

~1948: a Fourierova rozkladu W

↓
Lévy použil jinou bázi

• Konstrukce stáčí provést na $[0,1]$

• pak uváděnat nezávislé kopie, které se přepíná ---

$$W^0, W^1, W^2, \dots \text{ na } [0,1]$$

$$W(t) = W^0(t) \text{ na } [0,1]$$

$$= W^1(\frac{t-1}{2}) + W^0(1) \text{ na } [1,2]$$

= ...

• Nejprve konstrukce v dyadických bodech ... ($= k/2^m, 0 \leq k \leq 2^m$)
pak limita

• Lemma: $X \sim N(0,s), Y \sim N(0,t)$ nezávislé. Pak rozdelení X

pokud víme, že $X+Y=Z$ je

$$J(X|X+Y=Z) \sim N\left(\frac{Zs}{s+t}, \frac{st}{s+t}\right).$$

Oricini.

• Definujeme $W_0=0, W_1 \sim N(0,1)$

• Máme-li definováno $W(j/2^{m-1}), 0 \leq j \leq 2^{m-1}$ tak dogenerujeme

$$W\left(\frac{2j+1}{2^m}\right) \text{ tak, aby } \underbrace{W\left(\frac{2j+1}{2^m}\right) - W\left(\frac{2j}{2^m}\right)}_X \text{ a } \underbrace{W\left(\frac{2j+2}{2^m}\right) - W\left(\frac{2j+1}{2^m}\right)}_Y$$

byly nezávislé - viz lemma

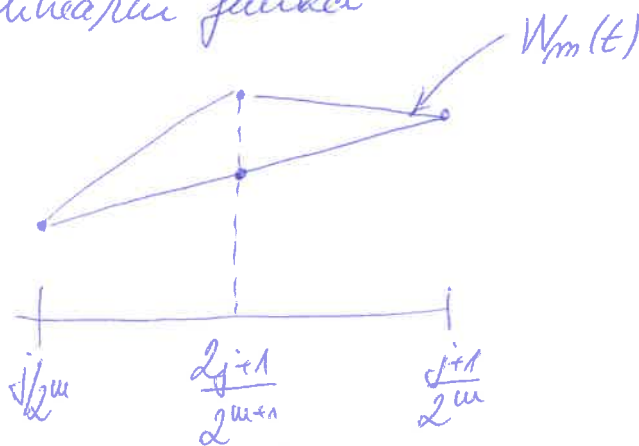
$$X \sim Y \sim N(0, 1/2^m); X+Y = W\left(\frac{2j+2}{2^m}\right) - W\left(\frac{2j}{2^m}\right) = Z \quad \begin{cases} s=t=1/2^m \\ \frac{s}{s+t} = \frac{1}{2}; \frac{st}{s+t} = \frac{1}{2^{m+1}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow W\left(\frac{2j+1}{2^m}\right) = W\left(\frac{2j}{2^m}\right) + N\left(\frac{Z}{2}; \frac{1}{2^{m+1}}\right) = W\left(\frac{2j}{2^m}\right) + \frac{1}{2} \{W\left(\frac{2j+2}{2^m}\right) - W\left(\frac{2j}{2^m}\right)\}$$

$$= \frac{1}{2} \{W\left(\frac{2j+2}{2^m}\right) + W\left(\frac{2j}{2^m}\right)\} + 2^{-(m+1)/2} \sum_{m,j} \text{III} + 2^{-(m+1)/2} \sum_{m,j} \text{I}$$

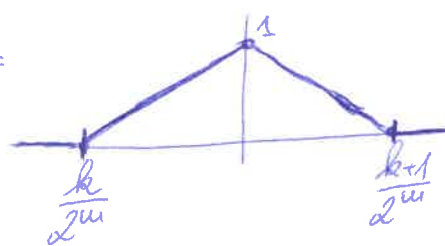
- Potí interpolující hodnoty $W(0), W(\frac{1}{2^m}), \dots, W(\frac{2^m-1}{2^m}), W(1)$ po částech lineární funkce

-34-



$$W_{m+1}(t) = W_m(t) + \sum_{k=0}^{2^m-1} \xi_{m,k} \cdot G_{m,k}(t) / 2^{(m+2)/2}$$

$G_{m,k}(t)$ = hat function =



Věta (Levy): Pokud $\xi_{m,k}$ jsou nezávislé ($m \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq 2^m-1$) $N(0,1)$ proměnné, pak s pravděpodobností 1 řada

$$W(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \xi_{n,k} G_{n,k}(t) / 2^{(n+2)/2} \quad (*)$$

konverguje stejnoměrně na $0 \leq t \leq 1$. Limitní funkce $W(t)$ je Wienerův proces.

Důkaz: • $\forall m, k: \mathbb{P}(|\xi_{m,k}| \geq 2^{(m+2)/4}) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{2^{(m+2)/4}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt$

Pozn. $\int_u^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \int_0^{\infty} \exp\{-(t+u)^2/2\} dt = e^{-u^2/2} \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-tu}}_{\leq 1} e^{-t^2/2} dt$

$$\leq e^{-u^2/2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-u^2/2}$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\{-[2^{(m+2)/4}]^2/2\} = \exp\{-2^{m/2}\}$$

• Union bound:

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq 2^m-1} |S_{m,k}| \geq 2^{(m+2)/4}\right) \leq 2^m \cdot \exp(-2^{m/2})$$

$$\text{Borel-Cantelli: } \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_m) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq m} E_k\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq m} E_k\right]^c\right) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq m} E_k^c\right) = 1$$

$$\Rightarrow \text{skoro jisti } \exists m_0 \forall m \geq m_0 : \max_{0 \leq k \leq 2^m-1} |S_{m,k}| \leq 2^{(m+2)/4}$$

$$\begin{aligned} \bullet |G_{m,2}(t)| &\leq 1, \quad \left| \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^m-1} S_{m,2} G_{m,2}(t) / 2^{(m+2)/2} \right| \\ &\leq \sum_{m=m_0}^{\infty} 2^{(m+2)/4} / 2^{(m+2)/2} \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{2^m-1} G_{m,2}(t) \right|}_{\leq 1} < +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow (*)$ konverguje stejnomerne!

Obeční ~~Pratt~~ - Kolmogorov - Čentsov (1956)

Bud' $(X_t)_{t \geq 0}$ náhodný proces takový, že existují $\alpha, \beta, \gamma > 0$ a

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \leq C|t-s|^{1+\beta}.$$

Pak existuje spojitá verze Y k X .

Důkaz: Y je verze X pokud $\forall t \in I: \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \dots X_t = Y_t$ p.j. pro všechna $t \in I$.

• Kto je jen postačující podmínka

Příklad: Dokažte existenci spojitá verze $(W_t)_{t \geq 0}$ a k tomuž