# Vlastnosti trajektorií

• existuje spojitá verze

<u>Variace funkce</u>: $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $t > 0$. Označme

$$\Delta_t^n = \{t_i^{(n)} : 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = t\}$$

dělení intervalu $[0,t]$. Norma dělení je

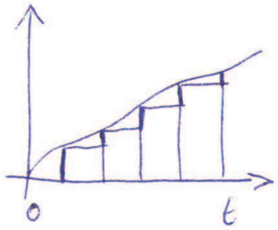
$$\|\Delta_t^n\| := \max_{1 \le i \le n} |t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}| \quad \dots = \max_{1 \le i \le n} |t_i - t_{i-1}|$$

Definice: Nechť pro každou posloupnost dělení $(\Delta_t^n)_{n \in \mathbb{N}}$ intervalu $[0,t]$ takovou, že $\|\Delta_t^n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, existuje konečná $\lim\limits_{\|\Delta_t^n\| \to 0} \sum\limits_{t_i \in \Delta_t^n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p$, $p > 0$. Pak říkáme, že funkce $f$ má na intervalu $[0,t]$ konečnou $p$-variaci; značíme $V_t^p(f)$ ... společná hodnota těchto limit.

Speciálně: • $p = 1 \Rightarrow V_t^1(f)$ se nazývá totální variace funkce, $|||f|||_{[0,t]}$

• $$|||f|||_{[0,t]} = \sup_{n, \Delta_t^n} \sum_{t_i \in \Delta_t^n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|.$$

Význam totální variace



... $|||f|||$, dráha projekce bodu $(x, f(x))$ na $y$-souřadnici

Pro $f \in C^1$: $$\sum_{t_i \in \Delta_t^n} \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{|t_i - t_{i-1}|} \cdot |t_i - t_{i-1}| \to \int_0^t |f'(s)|\,ds$$

... srovnejte s délkou grafu funkce: $$\int_0^t \sqrt{\underbrace{1}_{\text{proj. na osu x}} + f'(s)^2}\,ds$$

# Konvergence ve statistice

- Nechť $(X_n)_{n\geq 0}$ je posloupnost náhodných proměnných. Řekneme, že $X_n$ konvergují k $X$ v pravděpodobnosti, $X = \mathbb{P}\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} X_n$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$
- Konvergence skoro jistě: $\mathbb{P}(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X) = 1$
- Konvergence v $L_p$-normě: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^p = 0$

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{L_2} & \Rightarrow & \xrightarrow{L_1} \\ & & \Downarrow \\ \xrightarrow{a.e.} & \Rightarrow & \xrightarrow{\mathbb{P}} \end{array}$$

Definice: Buď $(X_t)_{t\geq 0}$ náhodný proces a nechť pro každou pos. dělení $(\Delta_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\|\Delta_t^n\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ intervalu $[0,t]$ existuje limita

$$\langle X\rangle_t := \mathbb{P}\text{-}\lim_{\|\Delta_t^n\|\to 0} \sum_{t_i\in\Delta_t^n} |X(t_i) - X(t_{i-1})|^2.$$

Tato limita se nazývá kvadratická variace $(X_t)_{t\geq 0}$, ozn. $\langle X\rangle = (\langle X\rangle_t)_{t\geq 0}$.

Věta: Buď $W$ standardní Wienerův proces. Pak $\langle W\rangle_t = t$, $\forall t \geq 0$.

Důkaz: Z $L_2$-konvergence plyne $\mathbb{P}$-konvergence

Stačí tedy $\mathbb{E}\Big|\sum_{t_i} |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|^2 - \underbrace{t}_{= \sum_{t_i}(t_i - t_{i-1})}\Big|^2 \xrightarrow[\|\Delta_t^n\|\to 0]{} 0$

Tedy: $\mathbb{E}\left|\sum_{t_i}\left\{|W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2-\underbrace{(t_i-t_{i-1})}_{=\mathbb{E}|W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2}\right\}\right|^2 = \left| Y_i := |W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2 \right|$

$$= \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mathbb{E}Y_i)\right|^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Y_i-\mathbb{E}Y_i)^2}_{I_1} + \underbrace{2\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{E}\left[(Y_i-\mathbb{E}Y_i)(Y_j-\mathbb{E}Y_j)\right]}_{II_1} \quad (*)$$

Dále upravíme

$$I_1 = \sum_i \mathbb{E}\left[Y_i^2 - 2Y_i\mathbb{E}Y_i + (\mathbb{E}Y_i)^2\right] = \sum_i \mathbb{E}[Y_i]^2 - [\mathbb{E}Y_i]^2$$

$W_{t_i}-W_{t_{i-1}} \simeq \sqrt{t_i-t_{i-1}}\cdot Z_i, \; Z_i \sim N(0;1)$

$Y_i \simeq (t_i-t_{i-1})\cdot Z_i^2$

$$= \sum_i (t_i-t_{i-1})^2\mathbb{E}[Z_i^4] - (t_i-t_{i-1})^2[\mathbb{E}Z_i^2]^2 = \sum_i (t_i-t_{i-1})^2\{3-1\} = \sum_i 2(t_i-t_{i-1})^2$$

$II_1$, $Y_i, Y_j$ jsou nezávislé $\mathbb{E}[(Y_i-\mathbb{E}Y_i)(Y_j-\mathbb{E}Y_j)] = \mathbb{E}(Y_i-\mathbb{E}Y_i)\cdot\mathbb{E}(Y_j-\mathbb{E}Y_j) = 0$

Celkem $(*) = 2\sum_i (t_i-t_{i-1})^2 \le 2\|\Delta_t^n\| \underbrace{\sum_{i=1}^{n}|t_i-t_{i-1}|}_{=t} = 2t\|\Delta_t^n\| \xrightarrow{\|\Delta_t^n\|\to 0} 0$

Tedy $L^2\text{-}\lim \sum_{t_i}|W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2 = t$, tedy i $\mathbb{P}$-lim. ∎

Důsledek: $|||W|||_{[0,t]} = +\infty$ skoro jistě.

Důkaz: sporem: Nechť $|||W|||_{[0,t]} < +\infty$

pak $\sum_i |W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2 \le \underbrace{\sup_i |W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sum_i |W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|}_{\le |||W|||_{[0,t]}}$

pro $\|\Delta_t^n\| \to 0$ ... stejnoměrná spojitost trajektorií $(W_t)_{t\ge 0}$

↳ Pro trajektorie s $|||W|||_{[0,t]} < +\infty$ platí $\lim_{\substack{n\to\infty \\ \|\Delta_t^n\|\to 0}} \sum_i |W_{t_i}-W_{t_{i-1}}|^2 = 0$.

Závěr $\|W\|_{[0,t]} = +\infty$ skoro jistě má nepříjemné důsledky!

↳ není možné snadno definovat integrál Wienerova procesu

$$\int_0^s f(s)\,dW_s$$

- Má-li funkce g konečnou variaci, pak lze definovat
  - Riemann - Stieltjesův integrál
  
    $$\int_a^b f\,dg(x): \text{ sumy } \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\left[g(t_i)-g(t_{i-1})\right]$$
    
    $$t_{i-1} < c_i < t_i$$
  - Lebesgue - Stieltjesův integrál
  
    $\int_a^b f\,dg(x)$ :
    - Funkci s konečnou variací lze napsat jako rozdíl dvou monotónních (neklesajících) funkcí ... $g(x) = g_+(x) - g_-(x)$
    - $\mu_g^+([s,t)) = g_+(t) - g_+(s) \geq 0$
    
      $\mu_g^-([s,t)) = g_-(t) - g_-(s) \geq 0$ dvě nezáp. míry

$$\int_a^b f\,dg(x) = \int_a^b f\,d\mu_g^+(x) - \int_a^b f\,d\mu_g^-(x).$$

Další vlastnosti wienerovských trajektorií

1, Wienerovské trajektorie skoro jistě nejsou diferencovatelné v žádném bodě $t \geq 0$. ... $\frac{W_{t+h}-W_t}{h} \sim N(0, \frac{1}{h}) \xrightarrow[h\to 0]{}$ ... lim. neexistuje

2, Trajektorie nejsou monotónní na žádném intervalu $[t, t+\varepsilon)$

3, Na každém intervalu $[t, t+\varepsilon)$ nekonečněkrát mění znaménko.

Věta (bez důkazu) $\lim_{t\to+\infty} \frac{W_t}{t} = 0$, $\mathbb{P}$-s.j.

Wienerův proces s driftem

Definice: Mějme $(W_t)_{t\geq 0}$ standardní W.p., $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

Položme $Y_t = \mu t + \sigma W_t$, $t \geq 0$. Pak $(Y_t)_{t\geq 0}$ nazýváme

Wienerův proces s driftem.

Platí: • $\mathbb{E} Y_t = \mu t$, $\operatorname{Var} Y_t = \sigma^2 t$, $Y_0 = 0$ skoro jistě.

• $Y_t$ je gaussovský proces

• limita nesymetrické náhodné procházky

• $\sigma$: "difuzní koeficient"