- Union bound:

$$\mathbb{P}\Big(\underbrace{\max_{0\le k\le 2^m-1} |S_{m,k}| \ge 2^{(m+2)/4}}_{E_m}\Big) \le 2^m \cdot \exp(-2^{m/2})$$

Borel-Cantelli: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\ge n} E_k\right) = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\ge n} E_k\right]^c\right) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\ge n} E_k^c\right) = 1$$

$\Rightarrow$ skoro jistě $\exists m_0 \ \forall m \ge m_0 : \max_{0\le k\le 2^m-1} |S_{m,k}| \le 2^{(m+2)/4}$

- $|G_{m,k}(t)| \le 1$, $\left| \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^m-1} S_{m,k}\, G_{m,k}(t) / 2^{(m+2)/2} \right|$

$$\le \sum_{m=m_0}^{\infty} 2^{(m+2)/4} / 2^{(m+2)/2} \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{2^m-1} G_{m,k}(t) \right|}_{\le 1} < +\infty$$

$\Rightarrow$ (*) konvergují stejnoměrně!

Obecná ~~[illegible]~~ - Kolmogorov - Čencov (1956)

Buď $(X_t)_{t\ge 0}$ náhodný proces takový, že existují $\alpha, \beta, C > 0$ s

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^\alpha \le C|t-s|^{1+\beta}.$$

Pak existuje spojitá verze Y k X.

Pozn: • Y je verze X pokud $\forall t\in I: \mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1 \ldots X_t = Y_t$ s.j. pro všechna $t \in I$.

- Věta je jen postačující podmínka

Cvičení: Dokažte existenci spojité verze $(W_t)_{t\ge 0}$ z této věty.

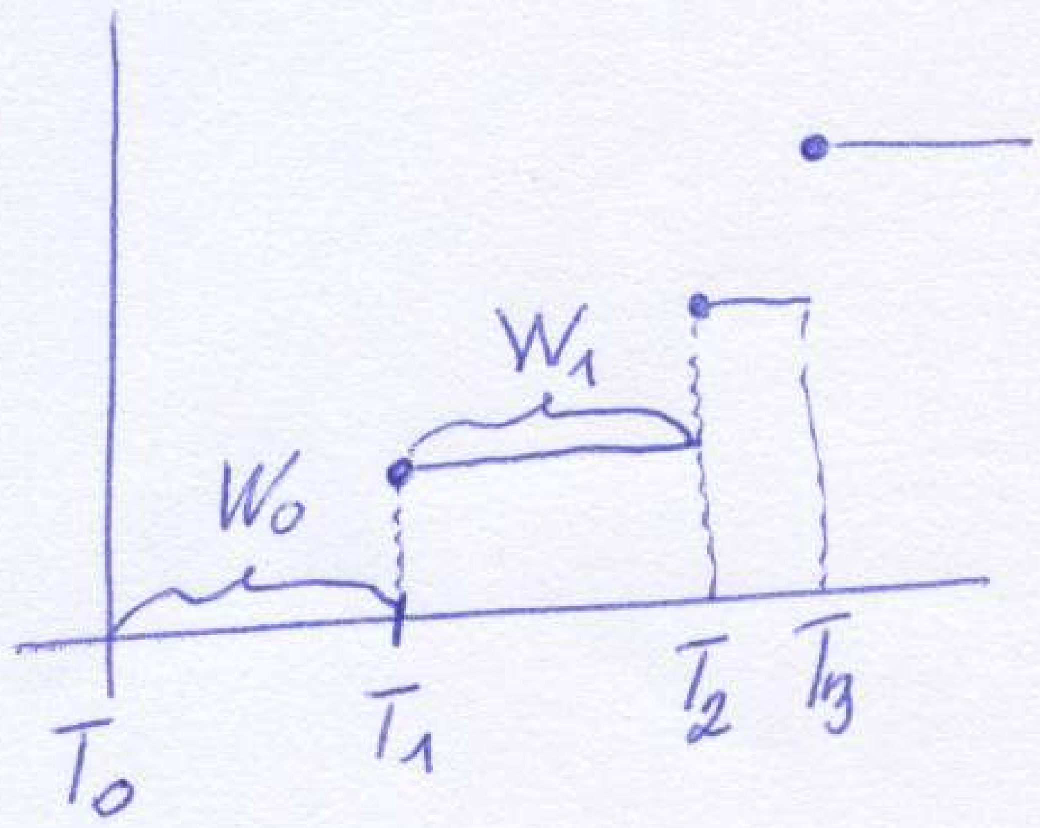
Další vlastnosti Poissonova procesu

1, Poissonův proces jako čítací proces

Nechť $N=(N_t)_{t\geq 0}$ je homogenní Poissonův proces int. $\lambda>0$

Položme $T_0=0$, $T_n=\inf\{t>T_{n-1}: N_t=n\}$, $n\in\mathbb{N}$

- T_n ... čas příchodu n-té události



- $W_n := T_{n+1}-T_n$

  ... doba strávená na hladině n, náhodná doba čekání

- $T_n=\sum_{i=0}^{n-1} W_i$, $T_n(\omega)=+\infty$ ... k n-té události nikdy nedošlo

$$N_{T_n}=n \text{ pro } T_n<+\infty$$

- Pozorování: $N_t\geq n \iff T_n\leq t$

Věta: Při tomto značení platí

1, $(W_i)_{i=0}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin s rozdělením $Exp(\lambda)$

2, $T_n\sim\Gamma(n,\lambda)$

$X\sim Exp(\lambda)$: $f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x\geq 0$ & $f_X(x)=0$ pro $x<0$

$X\sim\Gamma(n,\lambda)$: $f_X(x)=\dfrac{\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}$, $x>0$

Důkaz: $i=0$: $\mathbb{P}(W_0 > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$

$$\Rightarrow F_{W_0}(s) = 1 - \mathbb{P}(W_0 > s) = 1 - e^{-\lambda s};\ F'_{W_0}(s) = \lambda e^{-\lambda s}$$

- vyšší i: "chybný důkaz":

$$\mathbb{P}(W_i > s) = \mathbb{P}(N_{T_i+s} - N_{T_i} = 0) = \mathbb{P}(N_s = 0) = e^{-\lambda s}$$

... N má invariantní přírůstky, ale pro pevné časy!

$$N_{t+h} - N_{s+h} \sim N_t - N_s, \quad t,s,h > 0 \text{ pevné}$$

(= deterministické)

- korektní postup

  - Poissonův proces splňuje silnou Markovskou vlastnost

  - T_i je stopping time

  Proces $N_{T_i+t} =: \tilde{N}_t$, $t > 0$ je nah. proces s $\tilde{N}_0 = i$

  a nezávislý na $(N_t)_{0 \le t \le T_i}$.

  - $\mathbb{P}(W_i > s) = \mathbb{P}(N_{T_i+s} - N_{T_i} = 0) = \mathbb{P}(\tilde{N}_s - \tilde{N}_0 = 0)$

  $$= \mathbb{P}(N_s - N_0 = 0) = e^{-\lambda s}$$

$\tilde{N}$ má stejné rozdělení jako N

• Nezávislost

... pro $i < j$

• $\mathbb{P}(W_i > s, W_j > t) = \mathbb{P}(N_{T_i+s} - N_{T_i} = 0,\ N_{T_j+t} - N_{T_j} = 0)$

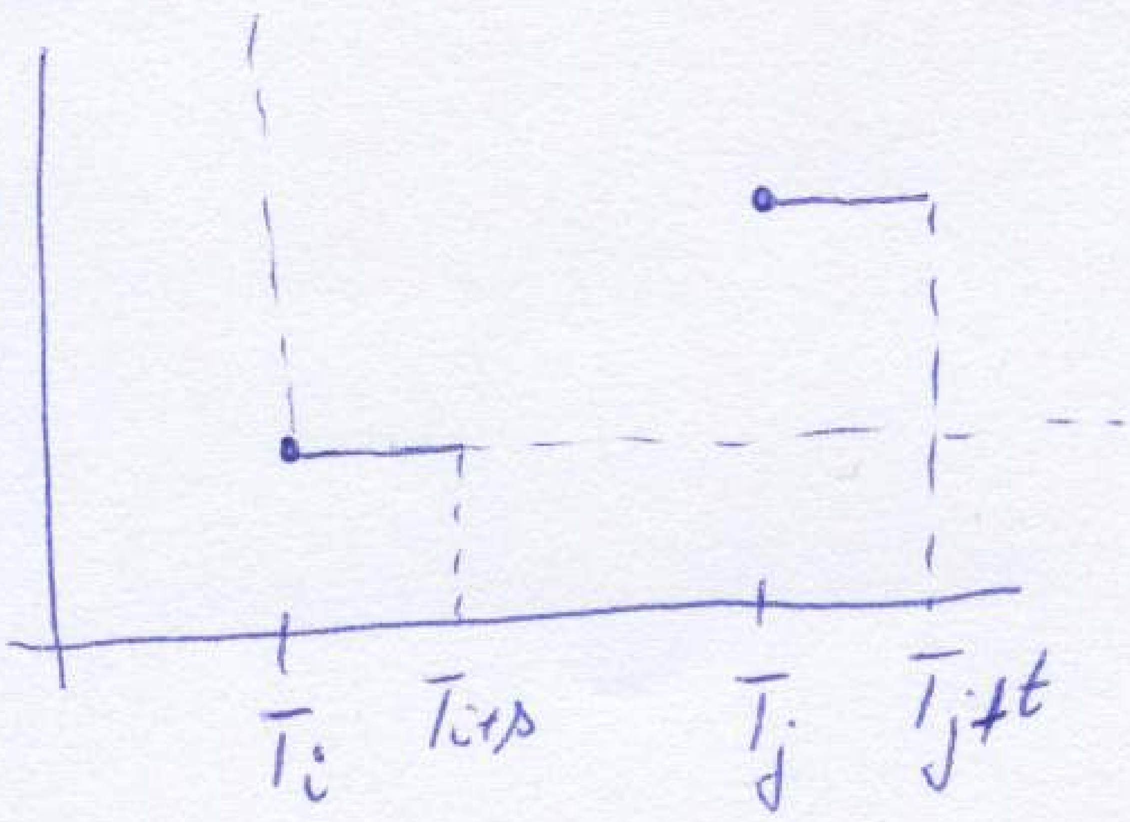
$\tilde{N}_u = N_{T_i+u} - N_{T_i}$ ... stejné rozdělení jako N.

$\tilde{T}_k$ = časy příchodu $\tilde{N}$

$= \inf\{t > 0 : \tilde{N}_t = k\} = \inf\{t > 0 : N_{T_i+t} - N_{T_i} = k\}$

$= \inf\{t > 0 : N_{T_i+t} = k+i\} = -T_i + \inf\{t > 0 : N_t = k+i\}$

$= T_{k+i} - T_i$



$T_i < T_i + s < T_j < T_j + t$

$0 < s < T_j - T_i < T_j - T_i + t$

$0 < s < \tilde{T}_k < \tilde{T}_k + t$

$= \mathbb{P}(\tilde{N}_s = 0;\ (N_{T_j+t} - N_{T_i}) - (N_{T_j} - N_{T_i}) = 0)$

$= \mathbb{P}(\tilde{N}_s = 0;\ \tilde{N}_{T_j - T_i + t} - \tilde{N}_{T_j - T_i} = 0)$

$k + i = j$

$k = j - i$

$= \mathbb{P}(\tilde{N}_s = 0;\ \tilde{N}_{\tilde{T}_{j-i}+t} - \tilde{N}_{\tilde{T}_{j-i}} = 0)$

$= \mathbb{P}(\tilde{N}_s = 0;\ \tilde{N}_{\tilde{T}_k+t} - \tilde{N}_{\tilde{T}_k} = 0) = \mathbb{P}(N_s = 0) \cdot \mathbb{P}(\bar{N}_{\bar{T}_k+t} - \bar{N}_{\bar{T}_k} = 0)$

$= \mathbb{P}(N_s = 0)\,\mathbb{P}(\bar{N}_t = 0)$

- $\mathbb{P}(W_i > s) = \mathbb{P}(N_{T_i+s} - N_{T_i} = 0) = \mathbb{P}(N_s - N_0 = 0) = \mathbb{P}(N_s = 0)$
- $\mathbb{P}(W_j > t) = \dots = \mathbb{P}(\bar{N}_t = 0)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(W_i > s, W_j > t) = \mathbb{P}(W_i > s)\, \mathbb{P}(W_j > t).$

$(W_i)_{i \geq 0}$ jsou tedy po dvou nezávislé.

Obdobně: i vzájemná nezávislost

2, $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} W_i$, $W_i \sim Exp(\lambda)$ nezávislé

$\Rightarrow T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ ∎

Je možná i opačná konstrukce Poissonova procesu

- $(W_n)_{n \geq 0}$ nezávislé s $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

Definujeme
- $T_0 = 0$, $T_n = \sum_{i=0}^{n-1} W_i$, $n \geq 1$
- $N_t = \#\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}$, $t \geq 0$, $N_0 = 0$

$\hookrightarrow$ $(N_t)_{t \geq 0}$ je Poissonův proces s $\lambda > 0$
bez dk.

Vlastnosti trajektorií Poissonova procesu:

1, Po částech konstantní, rostou o 1, spojité zprava s lim. zleva

2, $Ran(N) = \mathbb{N}_0$

3, Splňují zákon velkých čísel

Věta (Zákon velkých čísel pro Poissonův proces)

Buď $N=(N_t)_{t\geq 0}$ homogenní Poissonův proces s intenzitou $\lambda>0$.

Pak platí $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t}=\lambda$ s.j. (tedy pro skoro všechny trajektorie).

Důkaz: • Pro každé n je $T_n=\sum\limits_{i=0}^{n-1} W_i$, tedy je $T_n<+\infty$ s.j.

Tedy i $\lim\limits_{t\to+\infty} N_t\geq n$ s.j. ... n bylo libovolné

$$\Rightarrow \lim_{t\to+\infty} N_t=+\infty \text{ s.j.}$$

• $\frac{1}{n}T_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} W_i \xrightarrow[n\to\infty]{\text{silný ZVČ}} \mathbb{E}W_1=\frac{1}{\lambda}$ skoro jistě

• uvažujme trajektorii ω, pro kterou tyto 2 věci platí ... $\mathbb{P}=1$

• $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0: \forall n\geq n_0: \left|\frac{n}{T_n}-\lambda\right|<\varepsilon/2$

Pro $t\geq T_{n_0}$: označme n: $T_n\leq t<T_{n+1}$

Pak

$$\frac{n}{n+1}\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)\leq\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{T_{n+1}}=\frac{n}{T_{n+1}}\leq\frac{N_t}{t}=\frac{n}{t}\leq\frac{n}{T_n}<\lambda+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=\lambda.$$

$\blacksquare$

Pozn: Nehomogenní Poissonův proces

$$N_t-N_s\sim Poi(\Lambda(s,t));\quad \Lambda(s,t)=\int_s^t\lambda(x)\,dx.$$