5, Další vlastnosti náhodných procesů

1, Další příklady

• Brownův můstek

Nechť $(W_t)_{t\geq 0}$ je Wienerův proces, pak

$$\tilde{W}_t = W_t - t\cdot W_1 , \; t\in[0;1]$$

Splňuje • $\mathbb{E}\tilde{W}_t = 0$, $C_W(s,t) = \min(s,t) - st$

• $\tilde{W}_{1-t}$ je taky Brownův můstek

• $\tilde{W}_t = W_t - [tW_1 + (1-t)W_0]$ ... dvoubodová interpolace Wienerova procesu

• Naopak: Wienerův proces lze získat z Brownova můstku:

Pro $X\sim \mathcal{N}(0;1)$ & $\tilde{W}$ Brownův můstek:

$W_t = \tilde{W}_t + t\cdot X$ je (standardní) Wienerův proces

• Ornstein-Uhlenbeckův proces

$$U(t) := e^{-t/2}W(e^t)$$

• $\mathbb{E}U(t) = 0$, $C_U(s,t) = \mathbb{E}U(s)U(t) = e^{-|s-t|/2}$

• Gaussovský stacionární proces; $\bar{U}(t) = U(t_0+t)$ je opět O-U proces

• $W(t) = \begin{cases} \sqrt{t}\,U(\ln t), & t>0; \\ 0, & t=0. \end{cases}$

- Frakční Brownův pohyb

  Centrovaný gaussovský proces s kovarianční funkcí

  $$\mathbb{E} B^H(s) = 0, \quad \mathbb{E} B^H(s) B^H(t) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s-t|^{2H}\right), \quad s,t \geq 0$$

  kde $H \in (0;1]$ je Hurstův parametr.

  - $B^H(\alpha t) = \alpha^H B^H(t)$, $t \geq 0, \alpha > 0$
  - $B^{1/2}(t)$ je stand. Brownův pohyb
  - $B^H(0) = 0$; $\mathbb{E}(B^H(t))^2 = |t|^{2H}$
  - $\mathbb{E}(B^H(t) - B^H(s))^2 = |t-s|^{2H}$ ... nižší H ... "divočejší" trajektorie
  - $B^1(t) = t B^1(1)$ ... náhodné lineární trajektorie

- Brownův list (= Brownian sheet); Wiener-Čentsovo pole

  Gaussovský proces $W^C(t)$, $t \in \mathbb{R}^d_+$

  $$\mathbb{E} W^C(t) = 0, \quad \mathbb{E} W^C(t) W^C(s) = \prod_{\ell=1}^{d} \min\{s_\ell, t_\ell\}.$$

  $$= \lambda([0,s] \cap [0,t])$$

2, Silná Markovská vlastnost

- Nechť $s>0$ je pevné. Pak víme (Cvičení), že $(W_{t+s}-W_s)_{t\geq 0}$ je opět Brownův pohyb. Stejně například pro $(X_{m+n}-X_n)_{m=0}^{\infty}$ náhodnou procházku na $\mathbb{Z}$
  ... plyne z Markovské vlastnosti W, resp. X.

- Někdy se může stát, že $s>0$ není pevné!
  $\tau=\inf\{n\geq 0: X_n=10\}$ ... první čas, kdy $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ dosáhne hodnoty $X_n=10$

  $(X_{n+\tau}-X_\tau)_{n\geq 0}^{\infty}$? je to opět náhodná procházka na $\mathbb{Z}$?!
  ... vývoj náhodné procházky po dosažení hladiny 10?!

- Odpověď: ANO

  - Záleží na definici času τ
  - Je netriviální vše formalizovat

Příklad: $\tau=\inf\{n\geq 0: X_n=10\}-1$
... $(X_{n+\tau}-X_\tau)_{n\geq 0}$ není náh. procházka ... $X_1=1$.

Definice: Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je měřitelný prostor. Systém $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se nazývá filtrace, pokud

- $\forall t \geq 0$: $\mathcal{F}_t$ je σ-algebra
- $\forall s \geq t \geq 0$: $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}$ ... neklesající

- Pro náhodný proces $X = (X_t)_{t \geq 0}$ definujeme "přirozenou filtraci"

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq t)$$ ... nejmenší σ-algebru, pro kterou jsou X_s, $0 \leq s \leq t$, měřitelné.

- Proces $X = (X_t)_{t \geq 0}$ je adaptovaný na filtraci $\mathbb{F}$, pokud je $\forall t \geq 0$: X_t je měřitelná vzhledem k $\mathcal{F}_t$.

Příklad: W_t budiž standardní Brownův pohyb

$M(t) := \max_{0 \leq s \leq t} W(s)$ ... maximum W do času t.

Díky spojitosti trajektorií $\{M(t) > a\} = \bigcup_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ 0 \leq s \leq t}} \{W(s) > a\}$, kde $\{W(s) > a\} \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

... tedy $\{M(t) > a\} \in \mathcal{F}_t$.

- Definice "přípustných časů" τ ... To, jestli $\tau = t$, resp. $\tau \leq t$ musí záviset jen na X_s, $0 \leq s \leq t$

Definice: Nezáporná náhodná proměnná τ (s hodnotami v $[0,+\infty]$) se nazývá "stopping time" vzhledem k filtraci $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, pokud $\forall t\geq 0$: $\{\tau\leq t\}\in\mathcal{F}_t$.

Stopping time se nazývá vlastní, pokud $\tau<+\infty$ (a.e.) na Ω.

Příklad: • $\tau(a):=\inf\{t\geq 0: W(t)=a\}$; $\{\tau(a)\leq t\}=\{M(t)\geq a\}$ (spojitost)

$\in\mathcal{F}_t^W$

• $T_j=\inf\{n\geq 1: X_n=j\}$, X_n - náh. procházka na $\mathbb{Z}$, $j\geq 1$

$\{T_j=n\}=\{X_1\neq j,\dots,X_{n-1}\neq j, X_n=j\}$ ... čas prvního průchodu

$=\{X_1\neq j\}\cap\dots\cap\{X_{n-1}\neq j\}\cap\{X_n=j\}$

... stopping time

• čas posledního výskytu $L^j=\sup\{n\geq 0: X_n=j\}$

obecně <u>není</u> stopping time ... $\{L^j=n\}$ závisí i na $X_{n+1}, X_{n+2},\dots$

Projdeme dvě verze "silné Markovské vlastnosti" - pro diskrétní řetězce a pro Brownův pohyb

Silná Markovská vlastnost pro Markovské řetězce $(X_n)_{n\geq 0}$

Věta: Nechť $(X_n)_{n\geq 0}$ je Markovský řetězec s maticí přechodu P.

Nechť T je vlastní stopping time. Položme $Y_n = X_{T+n}$, $n \geq 0$.

Pak, podmíněně vzhledem k $X_T = i$, $(Y_n)_{n\geq 0} = (X_{T+n})_{n\geq 0}$

je Markovský řetězec s poč. rozdělením $Y_0 = i$, maticí přechodu P

a nezávislý na $X_0, \dots, X_T$.

Důkaz: Nechť B je jev určený $X_0, \dots, X_T$. Pak $B \cap \{T=m\}$ je určen

$X_0, \dots, X_m$; tedy

$$\exists D_{m+1} \subset S^{m+1} : B \cap \{T=m\} = (X_0, \dots, X_m) \in D_{m+1}.$$

Pro $j_0 = i$: $\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, \dots, X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T=m\} \cap \{X_T = i\})$

$$= \mathbb{P}(\{X_m = j_0, X_{m+1} = j_1, \dots, X_{m+n} = j_n\} \cap \{X_0, \dots, X_m\} \in D_{m+1} \cap \{X_m = i\})$$

$$= \mathbb{P}(\{X_m = j_0, \dots, X_{m+n} = j_n\} \mid \{X_0, \dots, X_m\} \in D_{m+1} \cap \{X_m = i\})$$

$$\cdot \mathbb{P}(\{X_0, \dots, X_m\} \in D_{m+1} \cap \{X_m = i\})$$

$$= \mathbb{P}(X_m = j_0, \dots, X_{m+n} = j_n \mid X_m = i) \cdot \mathbb{P}(\{X_0, \dots, X_m\} \in D_{m+1} \cap \{X_m = i\})$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = j_0, \dots, X_n = j_n) \cdot \mathbb{P}(B \cap \{T=m\} \cap \{X_T = i\})$$

Sečteme pro $m = 0, 1, 2, \dots$ a vydělíme $\mathbb{P}(X_T = i)$

$$\frac{\mathbb{P}(\{X_T = j_0, \dots, X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{X_T = i\})}{\mathbb{P}(X_T = i)} = \mathbb{P}(X_T = j_0, \dots, X_{T+n} = j_n \mid X_T = i \cap B)$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{P}(X_0 = j_0, \dots, X_n = j_n) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(B \cap \{T=m\} \cap \{X_T = i\})}{\mathbb{P}(X_T = i)} =$$

$$= \mathbb{P}(X_0=j_0,\dots,X_n=j_n)\cdot\frac{\mathbb{P}(B\cap\{X_T=i\})}{\mathbb{P}(X_T=i)}$$

$$= \mathbb{P}(X_0=j_0,\dots,X_n=j_n)\cdot\mathbb{P}(B\mid X_T=i)$$

Celkem tedy: $Y_0=i$ a $\mathbb{P}(Y_0=i, Y_1=j_1,\dots,Y_n=j_n\cap B)=$

$$=\mathbb{P}(X_0=i,X_1=j_1,\dots,X_n=j_n)\cdot\mathbb{P}(B\mid X_T=i)$$

... Řetězec Y má stejnou matici přechodu jako X a je nezávislý na jevech generovaných $(X_0,\dots,X_T)$.

Silná Markovská vlastnost pro Brownův pohyb

- nezávislé jevy: $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- nezávislé σ-algebry $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$: $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ pro $\forall A\in\mathcal{F}_1, B\in\mathcal{F}_2$
- náhodná proměnná X nezávislá na $\mathcal{F}$: $\mathbb{P}(X^{-1}(B)\cap F)=\mathbb{P}(X^{-1}(B))\cdot\mathbb{P}(F)$ $\forall B\subset\mathbb{R}, \forall F\in\mathcal{F}$

... $\mathcal{F}$ & σ-algebra generovaná X jsou nezávislé

Definice: Nechť T je stopping time vzhledem k $\mathbb{F}=(\mathcal{F}(t))_{t\geq 0}$

Pak $\mathcal{F}(T):=\{A : A\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{F}(t)\ \forall t\geq 0\}$

Věta: Nechť $(W_t)_{t\geq 0}$ je Wienerův proces a T je vlastní stopping time.

Pak $\{W_{T+t}-W_T\}_{t\geq 0}$ je opět Wienerův proces s počátkem v nule a nezávislý na $\mathcal{F}(T)$.

kap. 5: Další vlastnosti náh. procesů

3, Další vlastnosti Wienerova procesu

• Markovská vlastnost

Věta: Buď W standardní Wienerův proces. Pak platí

1, $\forall t \geq 0 : \forall 0 < h_1 < h_2 < \dots < h_n$ platí

$(W_{t+h_1} - W_t, \dots, W_{t+h_n} - W_t)$ je nezávislé na $(W_s)_{s \leq t}$

2, Pro $t_0 \geq 0$ libovolné je

$(\tilde{W}_t)_{t\geq 0} = (W_{t+t_0} - W_{t_0})_{t \geq 0}$ je opět standardní Wienerův proces

(restartovaný Wienerův proces v čase t_0)

Důkaz: 2, stačí ověřit definici

• $\tilde{W}_t = W_{t+t_0} - W_{t_0}$; $\tilde{W}_0 = W_{t_0} - W_{t_0} = 0$

• $(\tilde{W}_{t_1}, \tilde{W}_{t_2} - \tilde{W}_{t_1}, \dots, \tilde{W}_{t_n} - \tilde{W}_{t_{n-1}}) = (W_{t_1+t_0} - W_{t_0}, W_{t_2+t_0} - W_{t_0} - W_{t_1+t_0} + W_{t_0}, \dots$

$\dots W_{t_n+t_0} - W_{t_0} - W_{t_{n-1}+t_0} + W_{t_0})$

$= (W_{t_1+t_0} - W_{t_0}; W_{t_2+t_0} - W_{t_1+t_0}, \dots, W_{t_n+t_0} - W_{t_{n-1}+t_0})$

... nezávislé přírůstky W

• $\tilde{W}_t - \tilde{W}_s = W_{t_0+t} - W_{t_0+s} \sim N(0, t-s)$

• spojité trajektorie $t \to \tilde{W}_t = W_{t+t_0} - W_{t_0}$ ... spojitá

1, Pro $Y_m = (W_{t+h_1} - W_t, W_{t+h_2} - W_{t+h_1}, \dots, W_{t+h_m} - W_{t+h_{m-1}})^T$ a

$Z_m = (W_{t+h_1} - W_t, \dots, W_{t+h_m} - W_t)$ je opět $Z_m = A_m Y_m$; $A_m = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 1 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Y_m jsou nezávislé na $(W_s)_{s \le t}$, tedy i Z_m je nezávislé na $(W_s)_{s \le t}$. $\square$

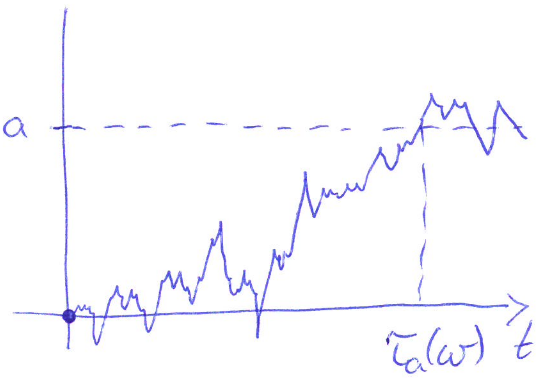
... dokázali jsme vlastně, že $T = t_0$ je stopping time a že pro $T = t_0$ splývá silná a klasická Markovská vlastnost.

- Čas prvního dotyku
  - $\omega \in \Omega$ pevné: $t \to W_t(\omega)$ ... trajektorie
  - Buď $a > 0$ pevné: $\tau_a := \inf\{t \ge 0 : W_t \ge a\} \in [0, \infty]$

    čas prvního dotyku úrovně a

    (first time passage, hitting time)

    τ_a ... náhodná veličina



Věta: Náhodná veličina τ_a má hustotu pravděpodobnosti

$$f_{\tau_a}(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\, x^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right), \quad x \ge 0$$

Lévyho distribuce

Waldova distribuce

Důkaz: • Položme $M_t = \max_{0 \le s \le t} W_s$, $t \ge 0$ ... dobře definované maximum do času t

• Pozorování: • $\{\omega : \tilde{\tau}_a(\omega) > t\} = \{\tilde{\tau}_a > t\} = \{M_t < a\} = \{\omega : M_t(\omega) < a\}$

• $\{\tilde{\tau}_a \le t\} = \{M_t \ge a\}$

• $F_{\tilde{\tau}_a}(t) = \mathbb{P}(\tilde{\tau}_a \le t) = \mathbb{P}(M_t \ge a) = \underbrace{\mathbb{P}(M_t \ge a \,\&\, W_t \le a)}_{I,} + \underbrace{\mathbb{P}(M_t \ge a \,\&\, W_t \ge a)}_{II,}$

ad $II,$: $W_t \ge a \Rightarrow M_t \ge a$ ... $II, = \mathbb{P}(W_t \ge a)$

ad $I,$: $\tilde{W}_s = W_{s+\tilde{\tau}_a} - W_{\tilde{\tau}_a}$ je opět Wienerův proces (silná Markovská vlastnost) & nezávislý na W_s, $0 \le s \le \tilde{\tau}_a$

$W_{\tilde{\tau}_a} = a$

$$\mathbb{P}(M_t \ge a, W_t \le a) = \mathbb{P}(M_t \ge a, W_t - W_{\tilde{\tau}_a} \le 0) =$$

$$= \mathbb{P}(\tilde{\tau}_a \le t, W_t - W_{\tilde{\tau}_a} \le 0) = \mathbb{P}(\tilde{\tau}_a \le t, W_t - W_{\tilde{\tau}_a} \ge 0)$$

$$= \mathbb{P}(M_t \ge a, W_t \ge a) = II, = \mathbb{P}(W_t \ge a)$$

Celkem: $F_{\tilde{\tau}_a}(t) = 2\mathbb{P}(W_t \ge a) = 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx = \begin{bmatrix} y = \frac{x}{\sqrt{2t}} \\ dy = \frac{dx}{\sqrt{2t}} \end{bmatrix}$

$$= 2\int_{a/\sqrt{2t}}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-y^2)\, dy$$

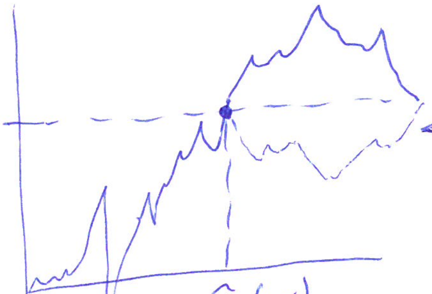
Konečně $f_{\tilde{\tau}_a}(t) = \frac{d}{dt} F_{\tilde{\tau}_a}(t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{-1/2}{t^{3/2}} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}\, t^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right)$

$t > 0$. ☒

Poznámky: • Reflektovaný Wienerův proces

$$\tilde{W}_t(\omega) = \begin{cases} W_t(\omega), & t \le \tilde{\tau}_a(\omega) \\ a - (W_t(\omega) - a); & t > \tilde{\tau}_a(\omega) \end{cases}$$

– lze ukázat, že je opět Wienerův proces



• $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_a \le t) = 2\mathbb{P}(W_t > a) = \mathbb{P}(|W_t| > a) = \mathbb{P}(M_t \ge a)$

• $W_t \sim N(0,t)$ ... $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_a \le t) = 2\mathbb{P}(W_t > a) = 2\mathbb{P}(\sqrt{t}\, Z > a) = 2\mathbb{P}(Z > a/\sqrt{t})$

$t \to +\infty$ ... $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_a < +\infty) = 2\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ ... $\tilde{\tau}_a < +\infty$ skoro jistě

• $$\mathbb{E}\tilde{\tau}_a = \int_0^\infty \underbrace{x \frac{a}{\sqrt{2\pi}\, x^{3/2}}}_{\sim x^{-1/2}} \underbrace{e^{-a^2/2x}}_{\to 1} dx = +\infty$$

$x \to +\infty$

Variace funkce

• Lévyho konstrukce Brownova pohybu

1920: Wiener - existence Wienerova procesu pomocí L_2-teorie

~1948: a Fourierova rozkladu W

↓ Lévy použil jinou bázi

• Konstrukci stačí provést na $[0;1]$

• pak uvažovat nezávislé kopie, které se slepí ...

$$W^0, W^1, W^2, \dots \text{ na } [0;1]$$

$$W(t) = W^0(t) \text{ na } [0;1]$$

$$= W^1(t-1) + W^0(1) \text{ na } [1,2]$$

$$= \vdots$$

• Nejprve konstrukce v dyadických bodech ... $(= k/2^m,\ 0 \le k \le 2^m)$

pak limita

• Lemma: $X \sim N(0,s)$, $Y \sim N(0,t)$ nezávislé. Pak rozdělení X pokud víme, že $X+Y=z$ je

$$\mathcal{D}(X \mid X+Y=z) \sim N\left(\frac{zs}{s+t}, \frac{st}{s+t}\right).$$ Cvičení.

• Definujeme $W_0 = 0$, $W_1 \sim N(0;1)$

• Máme-li definováno $W(j/2^{m-1})$, $0 \le j \le 2^{m-1}$ tak dogenerujeme $W\left(\frac{2j+1}{2^m}\right)$ tak, aby $\underbrace{W\left(\frac{2j+1}{2^m}\right) - W\left(\frac{2j}{2^m}\right)}_{=X}$ a $\underbrace{W\left(\frac{2j+2}{2^m}\right) - W\left(\frac{2j+1}{2^m}\right)}_{Y}$ byly nezávislé - viz. Lemma

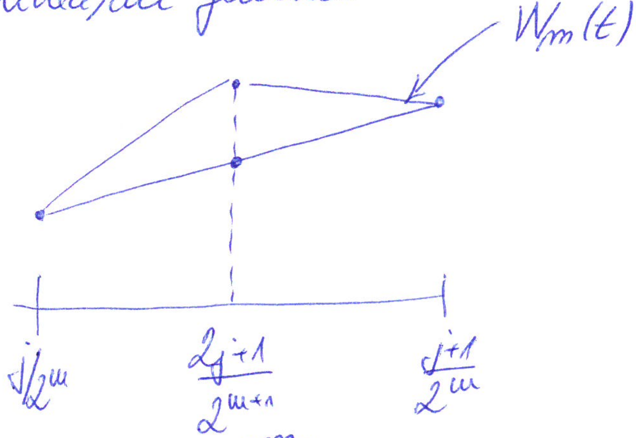
$$X \sim Y \sim N(0; 1/2^m);\quad X+Y = W\left(\frac{2j+2}{2^m}\right) - W\left(\frac{2j}{2^m}\right) = z \quad \left[\ s = t = 1/2^m,\ \frac{s}{s+t} = \frac{1}{2};\ \frac{st}{s+t} = \frac{1}{2^{m+1}}\right.$$

$$\Rightarrow W\left(\frac{2j+1}{2^m}\right) = W\left(\frac{2j}{2^m}\right) + N\left(\frac{z}{2}; \frac{1}{2^{m+1}}\right) = W\left(\frac{2j}{2^m}\right) + \frac{1}{2}\left\{W\left(\frac{2j+2}{2^m}\right) - W\left(\frac{2j}{2^m}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{W\left(\frac{2j+2}{2^m}\right) + W\left(\frac{2j}{2^m}\right)\right\} + 2^{-(m+1)/2}\xi_{m,j}$$

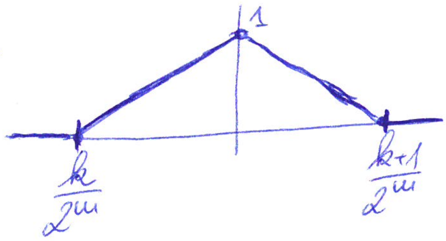
$$+ 2^{-(m+1)/2}\xi_{m,j}$$

• Poté interpolujeme hodnoty $W(0), W(1/2^m), \dots, W(\frac{2^m-1}{2^m}), W(1)$ po částech lineární funkcí



$$W_{m+1}(t) = W_m(t) + \sum_{k=0}^{2^m-1} \xi_{m,k} \cdot G_{m,k}(t) / 2^{(m+2)/2} \qquad \cancel{(*)}$$

$G_{m,k}(t)$ = hat function =



Věta (Lévy): Pokud $\xi_{m,k}$ jsou nezávislé ($m \in \mathbb{N}_0$, $0 \le k \le 2^m - 1$) $N(0,1)$ proměnné, pak s pravděpodobností 1 řada

$$W(t) := \xi_{0,0} \cdot t + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^m-1} \xi_{m,k} \, G_{m,k}(t) / 2^{(m+2)/2} \qquad (*)$$

konverguje stejnoměrně na $0 \le t \le 1$. Limitní funkce $W(t)$ je Wienerův proces.

Důkaz: • $\forall m,k$: $\mathbb{P}(|\xi_{m,k}| \ge 2^{(m+2)/4}) \le \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{2^{(m+2)/4}}^{\infty} e^{-t^2/2} \, dt$

Pozn. $\int_u^\infty e^{-t^2/2} dt = \int_0^\infty \exp\{-(t+u)^2/2\} dt = e^{-u^2/2} \int_0^\infty \underbrace{e^{-tu}}_{\le 1} e^{-t^2/2} dt$

$\le e^{-u^2/2} \cdot \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, e^{-u^2/2}$

$$\le \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \exp\{-[2^{(m+2)/4}]^2/2\} = \exp\{-2^{m/2}\}$$

- Union bound:

$$\mathbb{P}\Big(\underbrace{\max_{0\le k\le 2^m-1} |S_{m,k}| \ge 2^{(m+2)/4}}_{E_m}\Big) \le 2^m \cdot \exp(-2^{m/2})$$

Borel-Cantelli: $\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_m) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k\ge m} E_k\Big) = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\Big(\Big[\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k\ge m} E_k\Big]^c\Big) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k\ge m} E_k^c\Big) = 1$$

$\Rightarrow$ skoro jistě $\exists m_0\ \forall m \ge m_0$: $\max_{0\le k\le 2^m-1} |S_{m,k}| \le 2^{(m+2)/4}$

- $|G_{m,k}(t)| \le 1$, $\Big|\sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^m-1} S_{m,k}\, G_{m,k}(t)/2^{(m+2)/2}\Big|$

$$\le \sum_{m=m_0}^{\infty} 2^{(m+2)/4}/2^{(m+2)/2} \underbrace{\Big|\sum_{k=0}^{2^m-1} G_{m,k}(t)\Big|}_{\le 1} < +\infty$$

$\Rightarrow$ (*) konverguje stejnoměrně!

Obecný Daniell-Kolmogorov