3, Markovské řetězce s diskrétním časem

Markovský řetězec ... Markovský proces s diskr. oborem hodnot

s diskr. časem ... $I = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ... $X = (X_t)_{t \in \mathbb{N}_0} = (X_t)_{t=0}^{\infty}$

Definice: Markovský řetězec s diskrétním časem je proces $X = (X_t)_{t=0}^{\infty}$,

~~s diskr.~~ spočetným oborem hodnot (= spočetná množina stavů),

který splňuje $\mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1})$.

... další vývoj nezávisí na celé trajektorii, ale jen na posledním stavu.

Důležité příklady: 1, Náhodná procházka na $\mathbb{Z}$: $S = (S_n)_{n=0}^{\infty}$

$X_1, X_2, \dots$ nezávislé, $X_j = \pm 1$ s $\mathbb{P} = 1/2$

$S_0 := 0$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ ... tedy $S_0 = 0$; $S_1 = \begin{cases} +1 \dots \mathbb{P} = 1/2 \\ -1 \dots \mathbb{P} = 1/2 \end{cases}$

$S_2 = \begin{cases} +2 \dots \mathbb{P} = 1/4 \\ 0 \dots \mathbb{P} = 1/2 \\ -2 \dots \mathbb{P} = +1/4 \end{cases}$ a td.

2, Ruinování hráči ... A, B hrají o S dolarů, A vyhraje s prav. p
B vyhraje s prav. $q = 1-p$

X_n ... počet dolarů hráče A po n kolech hry

- $\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 \mid X_n = k) = p$; $\mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 \mid X_n = k) = q$; $1 \le k \le S-1$
- $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) = 1 = \mathbb{P}(X_{n+1} = S \mid X_n = S)$ ... setrvalý stav
absorpční stav

Obecný přístup: • $p_{ij}(n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ... pravděpodobnost přechodu

- často nezávisí na $\underline{n}$: "homogenní" Markovův řetězec
- Pro konečný počet stavů K: $P = (p_{ij})_{i,j=1}^{K}$ ... matice pravděpodobností přechodu

- $\sum_{j=1}^{K} p_{ij} = \sum_{j=1}^{K} \mathbb{P}(X_1=j \mid X_0=i) = 1$ ... ze stavu $X_0=i$ je třeba přejít do nějakého jiného stavu j.

- počáteční rozdělení: $p_i = \mathbb{P}(X_0=i) = p_i^{(0)}$ ... stejně $p_i^{(n)} = \mathbb{P}(X_n=i)$

- pak $p_j^{(n+1)} = \mathbb{P}(X_{n+1}=j) = \sum_{i=1}^{K} \mathbb{P}(X_{n+1}=j \cap X_n=i) = \sum_{i=1}^{K} \mathbb{P}(X_{n+1}=j \mid X_n=i)\,\mathbb{P}(X_n=i)$

$$= \sum_{i=1}^{K} P_{ij} \cdot p_i^{(n)}$$

... $p^{(n+1)} = \mathbb{P}^T p^{(n)}$ ... $(p^{(n+1)})^T = (p^{(n)})^T \mathbb{P} = \dots = (p^{(0)})^T \mathbb{P}^{n+1}$.

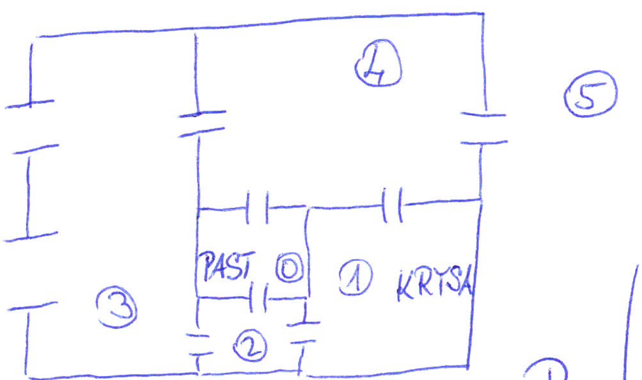
... Ze znalosti $\mathbb{P}$ a $p^{(0)}$ lze odvodit rozložení X_n pro všechna $n \geq 1$.

- Stejně i pro spočetný obor hodnot ... $K = +\infty$.

Analýza 1. kroku

... základní metoda ... na příkladu krysy v bludišti

Krysa běhá bludištěm, dveře volí rovnoměrně náhodně, v místnosti s pastí je chycena, zvenku už se nevrací. Jaká je pravděpodobnost, že se chytí do pasti? Že uteče ven?



$X_0 = 1$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• „Naivní přístup"

• existuje nekonečně mnoho trajektorií, začínajících v $X_0 = 1$ a končících nekonečným řetězcem nul, např.

$$(1, 2, 0, 0, 0, \ldots) \ldots \mathbb{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$(1, 2, 3, 4, 0, \ldots) \quad \mathbb{P} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{96}$$

… sečteme-li všechny, máme výsledek… výpočet obtížný

• a_i, $i = 0, 1, \ldots, 5$, = pravděpodobnost absorpce při $X_0 = i$ v $X_n = 0$

$$a_i = \mathbb{P}(\exists n : X_n = 0 \mid X_0 = i) \ \ldots \text{chceme } a_1$$

Víme: $a_0 = 1$, $a_5 = 0$

$$a_1 = \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{2} a_4 \ ; \ a_2 = \frac{1}{3} \cancel{a_0} + \frac{1}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_3$$

$$a_3 = \frac{1}{4} a_2 + \frac{1}{4} a_4 + \cancel{\frac{1}{2} a_5} \ ; \ a_4 = \frac{1}{4} \cancel{a_0} + \frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{4} a_3 + \cancel{\frac{1}{4} a_5}$$

$$\Rightarrow \quad 2a_1 = a_2 + a_4$$
$$3a_2 = 1 + a_1 + a_3$$
$$4a_3 = a_2 + a_4$$
$$4a_4 = 1 + a_1 + a_3$$

$$\to a_1 = 2a_3$$
$$\to a_4 = \frac{3}{4} a_2$$

$$2a_1 = a_2 + \frac{3}{4} a_2 = \frac{7}{4} a_2$$

$$\Rightarrow 3a_2 = 1 + a_1 + \frac{a_1}{2} = 1 + \frac{3}{2} a_1$$

$$\Rightarrow 2a_1 = \frac{7}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} a_1\right) = \frac{7}{12} + \frac{7}{8} a_1$$

$$\Rightarrow \frac{9}{8} a_1 = \frac{7}{12} \ \ldots \ a_1 = \frac{7}{12} \cdot \frac{8}{9} = \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{27}.$$

Pravděpodobnost úniku ven… v podstatě stejný výpočet… ověřit!

Jaká je střední doba trajektorie před absorpcí (ať už v pasti nebo venku)?

z_i ... střední doba absorpce při $X_0 = i$ ... Chceme z_1!

$z_0 = 0,\ z_5 = 0$

$z_1 = 1 + \frac{1}{2} z_2 + \frac{1}{2} z_4$; $z_2 = 1 + \frac{1}{3} z_1 + \frac{1}{3} z_0 + \frac{1}{3} z_3$; $z_3 = 1 + \frac{1}{2} z_5 + \frac{1}{4} z_4 + \frac{1}{4} z_2$

$z_4 = 1 + \frac{1}{4} z_5 + \frac{1}{4} z_1 + \frac{1}{4} z_0 + \frac{1}{4} z_3$

$2z_1 = 2 + z_2 + z_4$

$3z_2 = 3 + z_1 + z_3$

$4z_3 = 4 + z_2 + z_4$

$4z_4 = 4 + z_1 + z_3$

$4z_3 - 2z_1 = 2$

$4z_4 - 3z_2 = 1$

$2z_1 = 2 + z_2 + \frac{1}{4}(1 + 3z_2)$

$3z_2 = 3 + z_1 + \frac{1}{2}(1 + z_1)$

$2z_1 = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} z_2$

$3z_2 = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} z_1$

$\Rightarrow 2z_1 = \frac{9}{4} + \frac{7}{4}\left(\frac{7}{6} + \frac{1}{2} z_1\right)$

$\frac{9}{8} z_1 = \frac{9}{4} + \frac{49}{24}$

$\frac{9}{2} z_1 = 9 + \frac{49}{6}$

$z_1 = 2 + \frac{49}{27} \sim 3{,}81$

Další aspekty: přednáška "Markovské procesy"
... stac. stavy, limitní stavy, MCMC ... Markov Chain Monte Carlo
num. simulace, atd.

→ Náhodná procházka ve více dimenzích