1. Náhodné procesy

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ - pravděpodobnostní prostor
- I ... neprázdná množina ... typicky $I \subset \mathbb{R}$

Definice: Systém náhodných veličin $\{X_t : t \in I\}$ nazýváme náhodným procesem na I.

- Značení: $\{X_t : t \in I\} = (X_t)_{t \in I} = (X(t))_{t \in I}$
- $\forall t \in I$ je X_t náhodná veličina, tedy $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ měřitelná
- lze zobecnit ... pro $(E, \mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ je σ-algebra na E, $X_t : \Omega \to E$ pro každé $t \in I$

  ... E-hodnotový náhodný proces
- Pokud je E metrický (nebo topologický) prostor, obvykle volíme $\mathcal{E}$ jako Borelovskou σ-alg. (nejm. σ-algebru obsahující otevřené množiny).

(Elementární) příklady: 1, $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, $X_t = \begin{cases} 1 & \text{s } \mathbb{P} = 1/2 \\ 0 & \text{s } \mathbb{P} = 1/2 \end{cases}$ nezávislé

... nebo jakýkoliv jiný soubor nezávislých náh. proměnných

2, $I = \mathbb{N}_0$, $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{j=1}^{n} S_j$, kde $S_j = \begin{cases} +1 & \text{s pravd. } 1/2 \\ -1 & \text{s pravd. } 1/2 \end{cases}$.

... náhodná procházka na $\mathbb{Z}$

3, Pro $\theta \in \mathbb{R}$ pevné a pro $Y, Z \sim N(0,1)$ nezávislé buď

$$X(t) = Y \cos(\theta t) + Z \sin(\theta t)$$

4, Pro $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ nezávislé náh. proměnné a

pro $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ položme $X_n = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i Z_{n-i}$,

resp. $X_n = \sum_{i=0}^{\min(n,r)} \alpha_i Z_{n-i}$ ... klouzavé průměry

Pravděpodobnostní charakteristiky náh. procesy

- Pro náh. veličiny $(X_t)_{t \in I}$ můžeme spočítat střední hodnotu, korelaci, ...

Definice: • Buď $(X_t)_{t \in I}$ (komplexní) náhodný proces s konečnou střední hodnotou ($\forall t: \mathbb{E}|X_t| < +\infty$). Funkci $\mu: I \to \mathbb{C}$, $\mu_t = \mu(t) = \mathbb{E} X_t$ nazveme střední hodnotou X.

- Je-li $\mu \equiv 0$, pak X nazveme centrovaný.
- Pokud má X konečné druhé momenty ($\forall t \in I: \mathbb{E}|X_t|^2 < +\infty$), pak funkci $C_X: I \times I \to \mathbb{C}$, $C_X(s,t) = \mathbb{E}[(X_s - \mu_s)\overline{(X_t - \mu_t)}]$ nazveme autokovarianční funkcí procesu X.
- Stejně tak $R_X(s,t) = \mathbb{E}[X_s \overline{X_t}]$ je autokorelační funkce a $C_X(t,t)$ se nazývá "rozptyl v čase t".

Vlastnosti: 1, Platí Cauchy-Schwarzova nerovnost

$$|R_X(s,t)| \leq \sqrt{R_X(s,s)} \cdot \sqrt{R_X(t,t)}$$

2, R_X, C_X jsou tzv. poz. semidefinitní funkce, tedy

$$\forall \{t_1, \dots, t_n\} \subset I, \forall \alpha \in \mathbb{C}^n \text{ platí } \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j C_X(t_j, t_k) \overline{\alpha_k} \geq 0$$

Opravdu: $\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j C_X(t_j, t_k) \overline{\alpha_k} = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \mathbb{E}\left[(X_{t_j} - \mu_{t_j}) \overline{(X_{t_k} - \mu_{t_k})}\right] \overline{\alpha_k}$

$$= \mathbb{E}\left\{ \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j (X_{t_j} - \mu_{t_j}) \overline{\alpha_k} \overline{(X_{t_k} - \mu_{t_k})} \right\} = \mathbb{E}\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (X_{t_j} - \mu_{t_j}) \right|^2 \geq 0$$

Tedy matice $\left(C_X(t_j, t_k)\right)_{j,k=1}^{n}$ je poz. semidefinitní.

3, $R_X(t,s) = \overline{R_X(s,t)}$, $C_X(s,t) = \overline{C_X(t,s)}$

4, Lze ukázat, že pro každou $\mu: I \to \mathbb{C}$ a pro každou poz. semidef. funkci $C: I \times I \to \mathbb{C}$ existuje náh. proces takový, že μ a C jsou jeho střední hodnota a autokovarianční funkce.

Konečně rozměrná rozdělení náhodného procesu

- Uvažujme $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset I$ a náhodný proces $(X_t)_{t \in I}$ s hodnotami v $(E, \mathcal{E})$. Pak $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})$ je náhodný vektor z $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ do E^m.

Pro $E = \mathbb{R}$ definujeme

$$F_{t_1, \ldots, t_m}(c_1, \ldots, c_m) := \mathbb{P}(X_{t_1} \leq c_1, \ldots, X_{t_m} \leq c_m) \ldots = \mathbb{P}\{\omega : X_{t_1}(\omega) \leq c_1, \ldots, X_{t_m}(\omega) \leq c_m\}.$$

Důkaz (& náznak teoretické nadpnosti v pozadí):

- Nejprve definujeme $(E^m, \mathcal{E}^m)$
  - $E^m = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_i \in E\}$; $\mathcal{E}^m = \sigma\left(\prod_{i=1}^{m} B_i : B_i \in \mathcal{E}\right)$

    $\uparrow$ nejm. σ-algebra nad systémem v závorce.

- Chceme ukázat, že $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})$ je měřitelná, tj. $\forall B \in \mathcal{E}^m$ platí $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.
  - Pro ten účel definujeme $\Sigma := \{C \in \mathcal{E}^m : (X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})^{-1}(C) \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{E}^m$
  - Σ je σ-algebra .... jednoduché, pracné ... d.ú.
  - $B_i \in \mathcal{E}$, $C := \prod_{i=1}^{m} B_i$ ... pak $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_m})^{-1}\left(\prod_{i=1}^{m} B_i\right) =$

$$= \left\{\omega \in \Omega : (X_{t_1}(\omega), \ldots, X_{t_m}(\omega)) \in \prod_{i=1}^{m} B_i\right\} =$$

$$= \{\omega \in \Omega : X_{t_1}(\omega) \in B_1; \ldots; X_{t_m}(\omega) \in B_m\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} \{\omega : X_{t_i}(\omega) \in B_i\} = \bigcap_{i=1}^{m} \underbrace{X_{t_i}^{-1}(B_i)}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$$

Σ je σ-algebra, která obsahuje generátory $\mathcal{E}^m$ ... $\mathcal{E}^m$ je nejmenší s touto vlastností

$\Rightarrow \mathcal{E}^m \subset \Sigma$. ∎

Systém funkcí

$$F_{t_1,\dots,t_m}(c_1,\dots,c_m) = \mathbb{P}(X_{t_1} \le c_1, \dots, X_{t_m} \le c_m)$$

"konečněrozměrné distribuční funkce náh. procesu X k časům $(t_1,\dots,t_m)$ v bodech $(c_1,\dots,c_m)$."

- Pokud ex. příslušné parc. derivace

$$f_{t_1,\dots,t_m}(c_1,\dots,c_m) := \frac{\partial^m}{\partial x_1 \dots \partial x_m} F_{t_1,\dots,t_m}(x_1,\dots,x_m)\Big|_{x_1=c_1,\dots,x_m=c_m}$$

... konečně rozměrné hustoty

Platí • symetrie $F_{t_1,t_2}(c_1,c_2) = F_{t_2,t_1}(c_2,c_1)$

obecně $F_{t_1,\dots,t_m}(c_1,\dots,c_m) = F_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(m)}}(c_{\pi(1)},\dots,c_{\pi(m)})$

$\forall \pi$ ... permutace na $\{1,\dots,m\}$

- konzistence — $\lim\limits_{c_2 \to +\infty} F_{t_1,t_2}(c_1,c_2) = F_{t_1}(c_1)$

obecně $\lim\limits_{c_i \to +\infty} F_{t_1,\dots,t_m}(c_1,\dots,c_m) = F_{t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_m}(c_1,\dots,c_{i-1},c_{i+1},\dots,c_m)$.

Naopak každý systém funkcí, který je symetrický a konzistentní ("konzistentní systém distribučních funkcí") odpovídá nějakému procesu

Věta (Daniell-Kolmogorov - 1933): Buď I neprázdná a $\{F_{t_1,\dots,t_m} : \{t_1,\dots,t_m\} \subset I\}$ konzistentní systém distribučních funkcí.

Pak existuje $\mathbb{P}$ ... prav. míra na $(\mathbb{R}^I, \mathcal{K}(\mathbb{R}^I))$ ... $\mathbb{R}^I = \{f : f \text{ je funkce z } I \text{ do } \mathbb{R}\}$

... $\mathcal{K}(\mathbb{R}^I)$ ... Kolm. σ-algebra

taková, že $X_t(\omega) = X_t(\omega(\cdot)) = \omega(t)$ splňuje

$$\mathbb{P}(\omega : X_{t_1}(\omega) \le c_1, \dots, X_{t_m}(\omega) \le c_m) = F_{t_1,\dots,t_m}(c_1,\dots,c_m) \quad \text{... bez důkazu}$$