Spektrální rozklad náhodného procesu

- Fourierovská analýza pro náhodné procesy
  - v diskrétním (Fourierovy řady)
  - ve spojitém (Fourierova transformace) provedení.

- Pozitivně definitní funkce na
  - $\mathbb{R}$ ... $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}: \forall t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R} \ \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}: \sum_{i,j=1}^{m} c_i \bar{c}_j f(t_i - t_j) \geq 0$
  - $\mathbb{Z}$ ... $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}: \forall t_1, \dots, t_m \in \mathbb{Z} \ \forall c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}:$ — " —

Neboli matice $\begin{pmatrix} f(t_1-t_1) & \dots & f(t_1-t_m) \\ \vdots & & \\ f(t_m-t_1) & \dots & f(t_m-t_m) \end{pmatrix} \succeq 0$ .. je pozitivní (semi-)definitní

pro všechny $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ .. nebo $(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{Z}^m$.

- Takyjiž víme, že autokorelační funkce (R) a autokovarianční funkce (C) slabě stacionárního procesu $(C(s,t) = C(t-s))$ je pozitivně definitní

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_i \bar{c}_j C(t_i - t_j) = \sum_{i,j=1}^{m} c_i \bar{c}_j C(t_i, t_j) = \sum_{i,j=1}^{m} c_i \bar{c}_j \mathbb{E}(X_{t_i} - \mu)\overline{(X_{t_j} - \mu)}$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m} c_i (X_{t_i} - \mu) \sum_{j=1}^{m} \bar{c}_j \overline{(X_{t_j} - \mu)}\right] = \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{m} c_i (X_{t_i} - \mu)\right|^2 \geq 0$$

- Stejně snadno lze ověřit, že i Fourierova transformace pozitivní funkce je pozitivně definitní

$$\sum_{i,j=1}^{m} c_i \bar{c}_j \hat{f}(t_i - t_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i,j=1}^{m} c_i \bar{c}_j \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i(t_i - t_j)x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i e^{-it_i x}\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \bar{c}_j e^{it_j x}\right) f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{i=1}^{m} c_i e^{-it_i x} \Big|^2 \underbrace{f(x)}_{\geq 0} dx \geq 0.$$

Bochnerova věta říká, že všechny (spojité) pozitivně definitní funkce jsou Fourierovou transformací pozitivních funkcí (resp. měr).

Věta (Bochner). Nechť $C(t)$ je spojitá pozitivně definitní funkce na $\mathbb{R}$. Pak existuje právě jedna nezáporná míra ρ na $\mathbb{R}$, tak že

- $\rho(\mathbb{R}) = C(0) \geq 0$
- $C(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} d\rho(\omega)$.

- Nechť $C(t)$ je pozitivně definitní funkce na $\mathbb{Z}$ (tj. posloupnost). Pak existuje právě jedna míra μ na $[-\pi, \pi]$, tak že

$$C(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t} d\mu(\omega).$$

...druhé variantě se říká též Herglotzova věta.

Aplikujeme-li Bochnerovu větu na autokovarianční funkci $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ nebo $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, dostaneme <u>spektrální míru</u> na $\mathbb{R}$ (nebo na $[-\pi, \pi]$).

$\hookrightarrow$ spektrální distribuční funkce

Výpočet spektrální distribuční funkce // spektrální hustoty

Věta: Pokud $K = (K(t))_{t\in\mathbb{Z}} = (K_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ je (komplexní) posloupnost a $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |K(t)| < +\infty$, pak $K(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f(\lambda) d\lambda$, kde $t \in \mathbb{Z}$ a

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda} K(t).$$

Důkaz: Řada pro $f(\lambda)$ konverguje stejnoměrně a je tedy

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} f(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\lambda} K(k)\Big]d\lambda = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} K(k)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-k)\lambda}\,d\lambda$$

$$= K(t).$$

Věta: Nechť $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ je centrovaná slabě stacionární posloupnost se spektrální distribuční funkcí F. Pak existuje centrovaný proces $\{Z_\lambda\}_{\lambda\in[-\pi,\pi]}$ s ortogonálními přírůstky, pro který

$$X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\,dZ(\lambda),\quad t\in\mathbb{Z},$$

a

$$\mathbb{E}\,|Z(\lambda)-Z(-\pi)|^2 = F(\lambda),\quad -\pi\le\lambda\le\pi.$$

... Bez důkazu ... spektrální rozklad stacionární náhodné posl.

Věta: Slabě stacionární $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ se střední hodnotou μ a autokov. funkcí C splňuje $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t \to \mu$ podle kvadratického středu ("je ergodická podle kvadr. středu"), právě tehdy když $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Důkaz: • $\mu\equiv 0$ ... jinak $\tilde{X}_t = X_t-\mu$

• Nechť $X_t = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\,dZ(\lambda)$ je spektr. rozklad X

• Pak $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\,dZ(\lambda)\Big) = \int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} e^{it\lambda}\Big)}_{h_n(\lambda)}\,dZ(\lambda)$

$$h_n(\lambda) = \begin{cases}\frac{1}{n}\frac{e^{i\lambda}(1-e^{in\lambda})}{1-e^{i\lambda}}, & \lambda\ne 0\\ 1, & \lambda=0\end{cases}$$

• Nechť $h(\lambda) = \begin{cases}0, & \lambda\ne 0\\ 1, & \lambda=0\end{cases}$; $Z_0 := \int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda)\,dZ(\lambda)$

• $h_n(\lambda)\to h(\lambda)$ bodově i v $L_2(F)$ ... $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t \to Z_0$ podle středu

Příklad: Bílý šum je proces $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$, $X_t \sim N(0, \sigma^2)$ i.i.d.

Pak $\mathbb{E}X_t = 0$, $C(t,s) = \mathbb{E}[X_t X_s] = \begin{cases} 0 \ldots t \neq s \\ \sigma^2 \ldots t = s \end{cases}$, $t, s \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \tilde{C}(t-s) = \begin{cases} 0 \ldots t-s \neq 0 \\ \sigma^2 \ldots t-s = 0 \end{cases}$$

μ je potom Fourierova řada vytvořená po posloupnosti $\{\tilde{C}(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$,

tedy $\mu(A) = \int_A f(\lambda)\, d\lambda$, kde $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}}' e^{-ik\lambda} \tilde{C}(k)$

... zde $\mu = \frac{1}{2\pi}$ (Lebesgueova míra) $\cdot \sigma^2$

Pak opravdu $\tilde{C}(0) = \sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega \cdot 0}\, d\omega \cdot \sigma^2$

a $\underset{k \neq 0}{\tilde{C}(k)} = 0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k}\, d\omega \cdot \sigma^2$

$\rightarrow$ je $Z_0 = 0$ skoro jistě? ... $\mathbb{E}Z_0 = 0$ ... $\mathbb{E}|Z_0|^2 = 0$?

$$\mathbb{E}|Z_0|^2 = \mathbb{E}\left|\int_{-\pi}^{\pi} h(\lambda)\, dZ(\lambda)\right|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |h(\lambda)|^2\, dF(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} h_n(\lambda)\, dF(\lambda) =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} h_n(\lambda)\, dF(\lambda)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n}' e^{it\lambda}\right) dF(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n}' \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda}\, dF(\lambda)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n}' C(t) = 0 \ ?$$