Náhodné procesy

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

3. Cvičení

---

1. ($M|M|3$) Předpokládejme, že zákazníci, kteří chtějí platit v obchodě, jsou modelováni Poissonovým procesem - tedy že časy mezi dvěma příchody k pokladně jsou nezávislé proměnné s exponenciálním rozdělením se střední dobou 10 sekund. Zákazníci jsou obsluhováni třemi pokladnami a pokud jsou tyto plně obsazené, začne se vytvářet fronta společná pro všechny tři pokladny. Průměrná doba potřebná pro obsloužení zákazníka na pokladně a zaplacení je 20 sekund a i tyto časy jsou nezávislé. Modelujte počet zákazníků v systému (na pokladnách i ve frontě) Markovovým řetězcem X se spojitým časem.
   - 1. Ukažte, že existuje stacionární stav systému.
   - 2. Jaký je průměrný počet právě obsluhovaných zákazníků ve stacionárním stavu?
   - 3. Jaký je průměrný počet zákazníků právě čekajících ve frontě ve stacionárním stavu?
   - 4. Jaká je pravděpodobnost, že přicházející zákazník nebude muset čekat ve frontě?

2. ($M|M|\infty$) Předpokládejme, že webová stránka je navštěvována zákazníky podle Poissonova procesu, tedy časy mezi dvěma po sobě jdoucími příchody návštevníků jsou nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/\lambda$ pro parametr $\lambda > 0$. Dále předpokládejme, že čas, po který se návštěvníci dívají na tuto stránku, je exponenciálně rozdělená náhodná veličina se střední hodnotou $1/\mu$ pro $\mu > 0$ a že tyto čase jsou na sobě nezávislé. Konečně předpokládejme, že neexistuje limit počtu návštěvníků dané stránky. Kolik procent času má daná stránka v dlouhodobém horizontu právě $k \in \mathbb{N}_0$ návštěvníků?

3. Nechť $W(t) = (W^1(t), W^2(t))$ je dvourozměrný Wienerův proces, tj. $W^1(t), W^2(t)$ jsou dva nezávislé reálné Wienerovy procesy. Najděte (pro $R > 0$) pravděpodobnost $\mathbb{P}(\|W(t)\|_2 < R)$.

4. Pomocí generátoru náhodných čísel vyrobte jednu realizaci $W_0, W_1, \ldots, W_{100}$. K této realizaci pak vyrobte zjemnění $W_0, W_{1/2}, W_1, \ldots, W_{99{,}5}, W_{100}$ a k ní pak zjemnění $W_0, W_{1/4}, W_{1/2}, W_{3/4}, W_1, \ldots, W_{100}$.

5. Zkuste podobně nagenerovat trajektorie Wienerova můstku (a jejich zjemnění) a frakčního Wienerova procesu.

6. Najděte Karhunen-Loèvův rozklad Wienerova můstku.

7. Použijte Karhunen-Loèvův rozklad ke generování trajektorií a) Brouwnova pohybu na $[0, 1]$, b) Brownova můstku na $[0, 1]$, c) Ornstein-Uhlenbeckova procesu na $[0, 1]$.