

2. Cvičení

1. Necht' $X = (X_t)_{t \geq 0}$ je gaussovský proces. Dokažte, že i

a) $Y_t = 2X_t + 1$,

b) $Z_t = X_t^2$

jsou gaussovské procesy.

2. Buď $W = (W_t)_{t \geq 0}$ standardní Wienerův proces a položme $M_t := \max_{0 \leq s \leq t} W_s$. Dokažte, že i následující procesy jsou standardní Wienerovy:

a) $(-W_t)_{t \geq 0}$;

b) $(W_{s+t} - W_s)_{t \geq 0}$, $s > 0$ pevné;

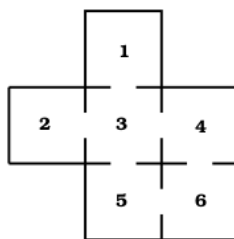
c) $W^* = (W_t^*)_{t \geq 0} = (aW(t/a^2))_{t \geq 0}$;

d) $(tW_{1/t})_{t \geq 0}$.

Dále ukažte, že $M_t^* := \max_{0 \leq s \leq t} W_s^* = \max_{0 \leq s \leq t} aW_{s/a^2} = aM_{t/a^2}$

3. Najděte matici přechodu pravděpodobností pro náhodnou procházku na \mathbb{Z} a pro úlohu ruinování hráče.

4. V bludišti běhá krysa. V každém kroce vyběhne náhodně jedněmi dveřmi z místnosti, ve které se právě nachází.



(i) Napište matici přechodu pravděpodobností příslušného Markovského řetězce.

(ii) Najděte stacionární rozložení.

(iii) Krysa začíná v první místnosti. Jaká je střední doba návratu do první místnosti?

(iv) Krysa začíná v první místnosti, v paté místnosti je past s kusem sýra. Jaká je střední doba prvního (a posledního...) příchodu do páté místnosti?

5. Opakujeme nezávislé hody mincí, při kterých padá Orel (O) nebo Hlava (H). Kolik hodů je třeba v průměru provést, než se objeví posloupnost vzorů HOHH?