Náhodné procesy

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

1. Cvičení

1. Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou náhodné veličiny. Dokažte, že matice

$$C = (\mathrm{Cov}(X_j, X_k))_{j,k=1}^n = (\mathbb{E}(X_j - \mathbb{E}X_j)(X_k - \mathbb{E}X_k))_{j,k=1}^n$$

   je pozitivně semidefinitní.

2. Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou nezávislé reálné náhodné veličiny. Rozhodněte, zda veličiny
   a) $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$
   b) $Z_n = X_1 + \dots + X_n$
   c) $W_n = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$

   tvoří Markovské náhodné procesy.

3. Buď $X_1, X_2, \dots$ nezávislé náhodné veličiny s $\mathbb{P}(X_i = +1) = p$ a $\mathbb{P}(X_i = -1) = q = 1 - p$ a položme $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Ukažte, že
   a) $\mathbb{E}X_i = p - q$, $\mathbb{E}S_n = n(p-q)$, $\mathrm{Var}[X_n] = 4pq$, $\mathrm{Var}[S_n] = 4npq$,
   b) $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2n} = 2k+1) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$,
   c) $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$ pro $|k| > n$,
   d) $\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}, \mathbb{P}(S_{2n+1} = 2k+1) = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1} q^{n-k}$ pro $|k| \le n$.

4. Spočtěte střední hodontu a autokovarianční funkci pro následující náhodné procesy.
   a) Nechť φ je rovnoměrně náhodně zvolený vektor na jednotkové kružnici v $\mathbb{R}^2$ a $X_t = t \cdot \varphi, t \ge 0$;
   b) S_n je náhodná procházka s parametry $p, q = 1 - p$;
   c) $\theta \in \mathbb{R}$ je pevné, $Y, Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ a $X(t) = Y \cos(\theta t) + Z \sin(\theta t)$;
   d) Y je rovnoměrně rozložená náhodná proměnná na $(0,1)$ a $X_t = te^Y$;
   e) Nechť $Y_n, n \in \mathbb{Z}$ jsou nezávislé náhodné proměnné s nulovou střední hodnotou a rozptylem σ^2, $m \in \mathbb{N}$ je pevné přirozené číslo a

$$X_n = \frac{1}{2m+1} \sum_{l=n-m}^{n+m} Z_l.$$

   f) $N = (N_t)_{t \ge 0}$ je Poissonovský proces;
   g) $W = (W_t)_{t \ge 0}$ je Wienerův proces;
   h) $B_t = W_t - tW_1, t \in [0,1]$ je Brownův můstek;