Náhodná procházka v jedné a více dimenzích (Pólya 1921, $d=1,2$; $d>2$)

Definice: Nechť $d \geq 1$ a nechť $X_1, X_2, X_3, \ldots$ je posloupnost $\mathbb{R}^d$-hodnotových nezávislých stejně rozdělených náhodných proměnných. Pak náhodná procházka v dimenzi d je posloupnost $(S_n)_{n\geq 0}$, kde $S_0 = 0$ a

$$S_n = S_{n-1} + X_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n, \quad n \geq 1.$$

$X_1, X_2, \ldots$ se nazývají kroky náhodné procházky.

- Jednoduchá náhodná procházka: $d=1$ .. $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = -1) = \frac{1}{2}$.

  $d>1$: $\mathbb{P}(X_j = +e_k) = \mathbb{P}(X_j = -e_k) = \frac{1}{2d}$, $k = 1, \ldots, d$

- N – počet výskytů v počátku, náhodná veličina

  $$N = \#\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = 0\}$$

- τ – čas prvního návratu do 0: $\tau = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ ... $\inf \emptyset = +\infty$

- $N = 1 \iff \tau = +\infty$ ... náhodná procházka se nikdy nevrátila do 0.

- Náhodná procházka je
  - rekurentní: $\mathbb{P}(N = +\infty) = 1$ .... $\iff \mathbb{P}(N < +\infty) = 0$
  - tranzitní: $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1$ .... $\iff \mathbb{P}(N = +\infty) = 0$

Lemma 1: Pro $n \geq 1$: $\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{P}(\tau=\infty)\mathbb{P}(\tau<\infty)^{n-1}$.

Důkaz: Dokažme nejprve $\mathbb{P}(N=n+1) = \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}(\tau<+\infty)$

... návratem do počátku se náhodná procházka rozpadá na dvě nez. části, první konečnou s $S_0 = S_k = 0$ a druhou $(S_{k+j})_{j\in\mathbb{N}_0}$, která má stejný tvar jako $(S_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$.

$$\mathbb{P}(N=n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N=n+1 \,\&\, \tau=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N'=n \,\&\, \tau=k)$$

$$N' = \#\{l \in \mathbb{N}_0 : S_{k+l} = 0\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N'=n)\cdot\mathbb{P}(\tau=k) = \mathbb{P}(N'=n)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(\tau=k) = \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}(\tau<+\infty)$$

Původní tvrzení indukcí: $n=1$: $\mathbb{P}(N=1) = \mathbb{P}(\tau=+\infty)$ OK

$n>1$: $\mathbb{P}(N=n+1) = \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}(\tau<+\infty) = \mathbb{P}(\tau=\infty)\cdot\mathbb{P}(\tau<+\infty)^n$ ∎

Důsledek: Každá náhodná procházka je buď rekurentní nebo tranzitivní.

Důkaz: • Pokud $\mathbb{P}(\tau=+\infty) = 0$, pak $\mathbb{P}(N=n) = 0$ pro $n \geq 1$ a tedy $\mathbb{P}(N<+\infty) = 0$.
... rekurentní

• Pokud $\mathbb{P}(\tau=+\infty) > 0$, pak

$$\mathbb{P}(N<+\infty) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\tau=+\infty)\mathbb{P}(\tau<+\infty)^{n-1}$$

$$= \mathbb{P}(\tau=+\infty)\frac{1}{1-\mathbb{P}(\tau<+\infty)} = 1.$$

Lemma 2: Náhodná procházka je tranzitní, pokud $\mathbb{E}N < +\infty$ a rekurentní pokud $\mathbb{E}N = +\infty$.

Důkaz: $\mathbb{E}N = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(N=n) + \underbrace{\infty \cdot \mathbb{P}(N=+\infty)}_{\text{úmluva: } \infty\cdot 0 = 0}$.

- pokud $\mathbb{E}N < +\infty$, je i $\mathbb{P}(N=+\infty)=0$ ... tranzitní
- pokud $\mathbb{P}(N=+\infty)=0$ ... tedy $\mathbb{P}(N<+\infty)=1 \overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} \mathbb{P}(\tau=+\infty)>0$, $\mathbb{P}(\tau<\infty)<1$

a $\mathbb{E}N = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \mathbb{P}(\tau=+\infty)\mathbb{P}(\tau<+\infty)^{n-1}$

$$= \mathbb{P}(\tau=+\infty)\sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(\tau<+\infty)^{n-1} = \frac{\mathbb{P}(\tau=\infty)}{[1-\mathbb{P}(\tau<\infty)]^2} = \frac{1}{\mathbb{P}(\tau=\infty)} < +\infty$$

... $\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$, $\alpha<1$

Lemma 3: Nechť náhodná procházka v $\mathbb{Z}^d$ má kroky $X_1, X_2, \dots$ a nechť $\varphi(k) = \mathbb{E}(e^{ik\cdot X_1}) = \mathbb{E}\cos(k\cdot X_1) + i\mathbb{E}\sin(k\cdot X_1)$, $k\in\mathbb{R}^d$.

Pak
$$\mathbb{E}N = \lim_{t\to 1^-}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1-t\varphi(\xi)}\frac{d\xi}{(2\pi)^d}$$

Důkaz: Pro $d=1$ je $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m\theta)+i\sin(m\theta))d\theta = \begin{cases} 1 \dots m=0; \\ 0 \dots m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \end{cases}$

Obecně $\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{im\cdot\xi}d\xi = \prod_{j=1}^{d}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im_j\cdot\xi_j}d\xi_j = \begin{cases} 1, m=(0,\dots,0) \\ 0, m\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}. \end{cases}$

Dosadíme-li za $m\in\mathbb{Z}^d$ náhodnou procházku po n krocích: S_n obdržíme

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{iS_n\cdot\xi}d\xi = \begin{cases} 1, S_n=0 \\ 0, \text{jinak} \end{cases} \quad \dots S_n\in\mathbb{Z}^d!$$

Integrujeme přes ω:

$$\mathbb{P}(S_n=0)=\mathbb{E}\,\chi_{\{S_n=0\}}=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\mathbb{E}(e^{iS_n\cdot\xi})\,d\xi$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\underbrace{\mathbb{E}(e^{iX_1\cdot\xi}\cdot e^{iX_2\cdot\xi}\cdots e^{iX_n\cdot\xi})}_{=\mathbb{E}(e^{iX_1\xi})\dots\mathbb{E}(e^{iX_n\xi})=\varphi(\xi)^n}\,d\xi=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\varphi(\xi)^n\,d\xi.$$

Pronásobíme pro $t\in[0,1)$ t^n a sečteme ("vytvořující funkce")

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' t^n\,\mathbb{P}(S_n=0)=\sum_{n\geq 0}{}'\frac{t^n}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\varphi(\xi)^n\,d\xi=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\sum_{n\geq 0}{}'[t\varphi(\xi)]^n\,d\xi$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{1-t\varphi(\xi)}\,d\xi\ \dots\ \text{geometrická řada konverguje, } |t\varphi(\xi)|\leq t<1.$$

Pro $t\to 1^-$: $LHS\to\sum_{n=0}^{\infty}{}'\mathbb{P}(S_n=0)=\sum_{n=0}^{\infty}{}'\mathbb{E}\,\chi_{\{S_n=0\}}=\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty}{}'\chi_{\{S_n=0\}}\right)=\mathbb{E}N.$

Věta: Jednoduchá náhodná procházka na $\mathbb{Z}^d$ je rekurentní pro $d=1,2$ a tranzitní pro $d\geq 3$.

"A drunken man will always find his way home but a drunken bird may get lost forever."

Důkaz: Pro jednoduchou náhodnou procházku je $X_j\in\{\pm e_1,\dots,\pm e_d\}$ a tedy

$$\varphi(\xi)=\mathbb{E}\,e^{iX\cdot\xi}=\frac{1}{2d}\left(e^{i\xi_1}+e^{-i\xi_1}+\dots+e^{i\xi_d}+e^{-i\xi_d}\right)=\frac{\cos(\xi_1)+\dots+\cos(\xi_d)}{d}.$$

Je tedy $\varphi(\xi)=1$ na $[-\pi,\pi]^d$ jen pro $\xi=(0,\dots,0)$ a toto je tedy jediný kritický bod $\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{1-t\varphi(\xi)}\,d\xi$, když $t\to 1^-$.

Chování $1-t\varphi(\xi)$ pro $\xi=0$ a $t \to 1^-$?

- $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$; $\frac{2x}{\pi} \le \sin x \le x$ pro $x\in[0,\pi]$

$$\left[\frac{x}{\pi}\right]^2 \le [\sin(x/2)]^2 \le [x/2]^2$$

$\Rightarrow$ • $2\frac{\xi_i^2}{\pi^2} \le 1-\cos(\xi_i) \le \frac{\xi_i^2}{2}$

$\Rightarrow$ • $1-t\varphi(\xi) = 1-t\cdot\frac{\cos(\xi_1)+\dots+\cos(\xi_d)}{d} = 1-t+t\,\frac{(1-\cos(\xi_1))+(1-\cos(\xi_2))+\dots}{d}$

$$\ge 1-t+\frac{t}{d}\cdot\frac{2}{\pi^2}\|\xi\|_2^2$$

$$\le 1-t+\frac{t}{2d}\|\xi\|_2^2$$

Pro $d=1,2$ je $\frac{1}{1-t\varphi(\xi)} \ge \frac{1}{1-t+\frac{t}{2d}\|\xi\|_2^2} \to \frac{1}{\|\xi\|_2^2/2d}$ a $\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{\|\xi\|_2^2}d\xi=+\infty$ ... $\mathbb{E}N=+\infty$

$\boxed{\ge \frac{1}{1-t+\|\xi\|_2^2/2d} \text{ \& monotónní konv.}}$

Pro $d\ge 3$ je $\frac{1}{1-t\varphi(\xi)} \le \frac{1}{1-t+\frac{t}{d}\cdot\frac{2}{\pi^2}\|\xi\|_2^2} \to \frac{1}{\frac{2}{\pi^2 d}\|\xi\|_2^2}$ a $\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{\|\xi\|_2^2}d\xi<+\infty$ – $\mathbb{E}N<+\infty$.

$\boxed{\le \frac{1}{1-t+\frac{\|\xi\|_2^2}{\pi^2 d}} \text{ \& monotónní}}$