

Okruhy otázek

1. Příklad ruinování hráče: označení

- (a) pravděpodobnost zruinování: rovnice analýzy prvního kroku, řešení diferenční rovnice, interpretace výsledku
- (a) střední délka hry: rovnice analýzy prvního kroku, řešení, interpretace

2. Markovovy řetězce s diskrétním časem

- (a) Definice, Markovova vlastnost
- (b) Matice přechodu, příklad ruinování hráče a náhodná procházka na $\mathbb{Z}$
- (c) Pravděpodobnosti přechodu vyššího řádu, Chapman-Kolmogorova rovnice
- (d) Dvoustavové Markovovy řetězce, výpočet P^n

3. Náhodné procházky

- (a) Náhodná procházka na $\mathbb{Z}$, $p = q = 1/2$, $p \neq q$
- (b) Rozložení S_n
- (c) První návrat do počátku: Konvoluční lemma, metoda vytvořující funkce, funkce $G(s)$, $H(s)$,
- (d) rozdělení $g(2k)$
- (e) Pravděpodobnost návratu do nuly v konečném čase
- (f) Střední doba návratu do počátku
- (g) Procházka opilého námořníka - rozdíl mezi dimenzemi 2, 3 a vyššími

4. Analýza prvního kroku

- (a) Pravděpodobnost dotyku, systém rovnic analýzy prvního kroku
- (b) Střední doba dotyku a absorpce
- (c) Čas prvního návratu, veličiny T_j^r , $\mu_j(i)$
- (d) Počet návratů: $\mathbb{E}[R_j|Z_0 = i]$, veličiny $p_{i,j}$, $f_{i,j}^{(n)}$, phase transition: $\mathbb{P}(R_i < +\infty|Z_0 = i) \in \{0, 1\}$

5. Klasifikace stavů

- (a) Stacionární rozdělení, absorpční stav
- (b) Komunikující stavy, třídy komunikujících stavů
- (c) Rekurentní (=trvalé) stavy, podmínka $\sum_n P_{i,i}^n = +\infty$, třídy rekurentních stavů
- (d) Tranzitní (přechodné) stavy, různé charakterizace, třídy tranzitních stavů
- (e) Pozitivně a nulově rekurentní stavy: definice $\mu_i(i) = \mathbb{E}[T_i^r|X_0 = i] \begin{matrix} \leq \\ < \end{matrix} + \infty$, *třídy pozitivně rekurentních stavů*
- (f) Perioda stavu, aperiodičnost, perioda komunikujících stavů

6. Stacionární stav(y) a limitní chování Markovova řetězce

- (a) Stacionární stav, procházka na konečném grafu
- (b) Rovnice detailní rovnováhy

- (c) Rovnice $\pi_i = 1/\mu_i(i)$: předpoklady, *odvození*
- (d) Limitní distribuce, $P_{i,j}^n \rightarrow \pi_j$: předpoklady, *odvození*
- (e) Algebraické metody: Perron-Frobeniova věta
- (f) PageRank
- (g) Markov Chain Monte Carlo: Metoda Monte Carlo, příklady, konstrukce Markovova řetězce s danou stacionární distribucí, Metropolisův algoritmus

Důkazy v bodech 6c) a 6d) je možné si vybrat, jinak nebudou zkoušeny.