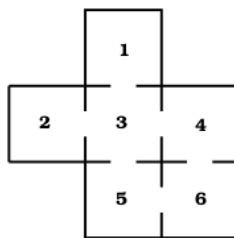


3. Cvičení

1. (Poissonovská slepice). Poissonovská slepice Máša naklade N vajec, kde N má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Protože se kolem Máši pohybuje i kohout Čeněk, tak se z vajec mohou líhnout kuřata. Z vajíčka se vylíhne kuře s pravděpodobností $p \in (0, 1)$ nezávisle na ostatních vejcích. S jakou pravděpodobností bude Máša pyšnou matkou právě tří kuřat?
2. (Mendelova zahrádka) Na zahrádce pěstujeme hrách a sledujeme vývoj genu, který se vyskytuje ve dvou formách, a sice G nebo g . Hrách má vždy pár těchto genů, tedy buď GG (dominantní), Gg (smíšený=hybridní, na pořadí nezáleží a Gg je totéž jako gG), a gg (recesivní). Při křížení zdědí nová rostlina náhodně jeden z genů každého rodiče.
Začněme s hrachem daného typu a zkřížíme ho s hybridem. Tento dále křížíme s hybridem, a tak dále, dalšími kříženími s hybridem.
 - (i) Napište matici přechodu takto definovaného Markovského řetězce.
 - (ii) Předpokládejme, že začneme s hybridem. Vypočtěte pravděpodobnosti $\mu_n(GG), \mu_n(Gg), \mu_n(gg)$ toho, že v n -té generaci má rostlina geny GG, Gg , resp. gg .
3. Vedoucí katedry statistiky má 4 deštníky, některé doma a některé v kanceláři. Deštník si s sebou bere jen když prší, jinak jde bez deštníku. Může se ale bohužel stát, že všechny deštníky jsou na jednom místě a vedoucí odchází z druhého místa a prší. V tom případě zmokne.
 - Pokud pravděpodobnost deště je p , jaká je pravděpodobnost, že vedoucí zmokne?
 - V Edinburghu je možné předpokládat $p = 0.6$. Kolik deštníků bude potřebovat vedoucí tamní katedry statistiky, aby pravděpodobnost zmoknutí byla menší než 1%?
4. Hosté na party hrají hru. Každý host dá jednu ponožku (nebo jinou část oděvu) do pytle. Poté je pytel zamíchán a každý si (náhodně a rovnoměrně) vytháhne jeden kus oděvu. Jaká je pravděpodobnost p_n , že při n hostech si žádný host nevytáhne svůj kus oděvu.
5. Smith je ve vězení a má 3 dolary. Ven se dostane, když bude mít 8 dolarů. Žalářník souhlasil, že si s ním zahraje následující hru. V každém kole vsadí Smith A dolarů. S pravděpodobností 0.4 vyhraje a dostane A dolarů, s pravděpodobností 0.6 prohraje a o A dolarů přijde. Nalezněte pravděpodobnost, že Smith vyhraje dříve než prohraje všechny své peníze, pokud
 - (i) Sází vždy jeden dolar.
 - (ii) Sází vždy co nejvíce, ale ne více než je nutné pro dosažení osmi dolarů.
6. V bludišti běhá krysa. V každém kroce vyběhne náhodně jedněmi dveřmi z místnosti, ve které se právě nachází.



- (i) Napište matici přechodu pravděpodobností příslušného Markovského řetězce.
 - (ii) Najděte stacionární rozložení.
 - (iii) Krysa začíná v první místnosti. Jaká je střední doba návratu do první místnosti?
 - (iv) Krysa začíná v první místnosti, v páté místnosti je past s kusem sýra. Jaká je střední doba prvního (a posledního...) příchodu do páté místnosti?
7. Markovský řetězec se stavy $\{1, 2, 3\}$ má matici přechodu pravděpodobností

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že stav 3 je absorbující a spočtěte střední dobu do absorpce, začínáme-li ze stavu 1.