5. Klasifikace stavů

1. Komunikující stavy

Stav $j \in S$ je dostupný z $i \in S$ (zapíšeme $i \to j$) pokud ex. $n \geq 0$:

$$[P^n]_{i,j} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) > 0.$$

Je tedy možné přejít z i do j s kladnou pravděpodobností v konečném čase.

- Je tedy (pro $n=0$) $i \to i$ pro $\forall i \in S$
- Pokud $i \to j$ a zároveň $j \to i$, řekneme, že stavy i a j komunikují, označíme $i \leftrightarrow j$.

Relace $\leftrightarrow$ je ekvivalentní relace, tj. splňuje

a, Reflexivita: $\forall i \in S: i \leftrightarrow i$

b, Symetrie: $\forall i,j \in S: (i \leftrightarrow j) \Leftrightarrow (j \leftrightarrow i)$

c, Tranzitivita: $\forall i,j,k \in S: [(i \leftrightarrow j) \& (j \leftrightarrow k)] \Rightarrow (i \leftrightarrow k)$

Je tedy možné rozdělit S do (konečně nebo nekonečně mnoha) $A_1, A_2, \ldots \subset S$ s $S = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, $i \leftrightarrow j$ $\forall i,j \in A_q$ & $i \not\leftrightarrow k$ pro $i \in A_p$, $k \in A_q$ & $p \neq q$.

Množinám $A_1, A_2, \ldots$ říkáme třídy komunikujících stavů.

Markovský řetězec, který má jen jednu třídu komunikujících stavů (tedy každý stav komunikuje s každým stavem), se nazývá nerozložitelný. Jinak se nazývá rozložitelný.

2, Rekurentní stavy

(trvalý)

Def: Stav $i \in S$ je rekurentní, pokud při startu v i se Markovův řetězec vrátí do i s pravděpodobností 1 v konečném čase.

Tedy pokud $p_{i,i} = \mathbb{P}(T_i^n < +\infty \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} : X_n = i \mid X_0 = i) = 1$.

Z předchozí kap. víme, že toto je ekvivalentní: $\mathbb{E}[R_i \mid X_0 = i] = +\infty$ a $\mathbb{P}(R_i = +\infty \mid X_0 = i) = 1$.

Například stav 0 je rekurentní pro jednoduchou procházku pokud $p = q = 1/2$ a není rekurentní pro $p \neq q$.

Věta: Stav $i \in S$ je rekurentní, právě když $\sum_{n=1}^{\infty} [\mathbb{P}^n]_{ii} = +\infty$.

Důkaz: $\forall i,j \in S$: $\mathbb{E}[R_j \mid X_0 = i] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{X_n = j\}} \mid X_0 = i\right]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\chi_{\{X_n=j\}} \mid X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} [P^n]_{ij}. \blacksquare$$

Důsledek: Nechť $i \in S$ je rekurentní stav. Pak každý stav $j \in S$, který komunikuje s $i \in S$, je rekurentní.

Důkaz: Z definice víme, že ex. $a, b \geq 1$ tak, že

$$[P^a]_{ij} > 0 \ \& \ [P^b]_{ji} > 0.$$

Pak pro $n \geq a+b$ platí

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = j) = \sum_{l,m \in S} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-a} = l)\,\mathbb{P}(X_{n-a} = l \mid X_b = m)\,\mathbb{P}(X_b = m \mid X_0 = j)$$

$$\geq \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-a} = i)\,\mathbb{P}(X_{n-a} = i \mid X_b = i)\,\mathbb{P}(X_b = i \mid X_0 = j) = [\mathbb{P}^a]_{ij} \cdot [P^{n-a-b}]_{ii} [P^b]_{ji}$$

Tedy: $\sum_{n=a+b}^{\infty} [P^n]_{j,j} \geq [P^a]_{ij} [P^b]_{ji} \sum_{n=a+b}^{\infty} [P^{n-a-b}]_{ii}$

$= [P^a]_{ij} [P^b]_{ji} \sum_{n=0}^{\infty} [P^n]_{i,i} = +\infty.$ ☒

3, Tranzitní stavy (průchodný)

Stav $i \in S$ je tranzitní, pokud není rekurentní, tedy $\mathbb{P}(R_i = +\infty | X_0 = i) < 1$, neboli $\mathbb{P}(R_i = +\infty | X_0 = i) = 0$.

Další ekvivalentní formulace jsou $\mathbb{P}(R_i < +\infty | X_0 = i) > 0$ a $\mathbb{P}(R_i < +\infty | X_0 = i) = 1$.

Dále je stav $i \in S$ tranzitní, právě když

$$p_{ii} = \mathbb{P}(T_i^R < +\infty | X_0 = i) = \mathbb{P}(X_n = i \text{ pro nějaké } n \geq 1 | X_0 = i) < 1,$$

nebo $\mathbb{P}(T_i^R = +\infty | X_0 = i) > 0$, nebo $\mathbb{E}[R_i | X_0 = i] < +\infty$, nebo

$$\sum_{n=1}^{\infty} [P^n]_{ii} < +\infty.$$

Dále (z předchozího důsledku), stav $j \in S$ komunikující s tranzitním stavem $i \in S$ je také tranzitní.

Věta: Nechť $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ je Markovský řetězec s konečnou množinou stavů S. Pak alespoň jeden stav je rekurentní.

Důkaz: Z analýzy prvního kroku:

$$\mathbb{E}[R_j | X_0 = i] = p_{ij} (1 - p_{jj}) \sum_{n=1}^{\infty} n (p_{jj})^{n-1} = \frac{p_{ij}}{1 - p_{jj}}.$$

Pokud je $j \in S$ tranzitní, pak $P_{jj} < 1$ a

$$\mathbb{E}[R_j | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} [P^n]_{ij} < \infty, \text{ tedy: } \lim_{n\to\infty} [P^n]_{ij} = 0.$$

Pokud by všechny stavy byly tranzitní a S konečná, tak

$$0 = \sum_{j\in S} \lim_{n\to\infty} [P^n]_{ij} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j\in S} [P^n]_{ij} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1. \quad \blacksquare$$

4, Pozitivní a nulově rekurentní stavy

Střední dobu návratu ze stavu i do stavu $i \in S$ jsme označili

Jen pro rekurentní stav: $\mu_i(i) = \mathbb{E}[\underbrace{T_i^R}_{T_i^R < +\infty} | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(T_i^R = n | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$

Def: Rekurentní Stav $i \in S$ je pozitivně rekurentní, pokud $\mu_i(i) = \mathbb{E}[T_i^R | X_0 = i] < +\infty$

a nulově rekurentní, pokud $\mu_i(i) = \mathbb{E}[T_i^R | X_0 = i] = +\infty$.

Pro každý rekurentní stav je $\mathbb{P}(T_i^R < \infty | X_0 = i) = 1$, tedy náhodná doba

návratu je skoro jistě konečná ... její střední hodnota ale může být

jak konečná tak nekonečná! < 36a, b.

Platí: Věta i, Pro S konečnou jsou všechny rekurentní stavy $X = (X_n)_{n=0}^{\infty}$

i pozitivně rekurentní!

ii, Nerozložitelný Markovův řetězec s konečným stavovým prostorem

má všechny stavy pozitivně rekurentní.

Důkaz: ... vynechám ... odpovídá Větě --

Věta: Nechť $i \neq j \in S$ jsou dva rekurentní stavy a nechť i komunikuje s j. Pokud i je pozitivně rekurentní, pak i j je pozitivně rekurentní.

Každá třída komunikujících stavů tedy obsahuje buď jen tranzitní stavy, nebo jen pozitivně rekurentní stavy, nebo jen nulově rekurentní stavy.

Důkaz: I) Nechť $\mu_i(i) = \mathbb{E}[T_i^R | X_0^i] < +\infty$ ... tedy i je poz. rekurentní.

Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je nejm. přir. číslo s $[P^{n_0}]_{ij} > 0$ ... stavy komunikují

Pak $+\infty > \mu_i(i) = \mathbb{E}[T_i^R | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathbb{P}(T_i^R = n | X_0 = i)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\mathbb{P}(T_i^R = n \,\&\, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\mathbb{P}(T_i^R = n, X_{n_0} = j, X_{n_0-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \cdot \frac{\mathbb{P}(X_{n_0} = j, X_{n_0-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i, X_0 = i)}{= \text{''}}$$

$$\geq \mathbb{E}[T_i^R | X_{n_0} = j, X_{n_0-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i, X_0 = i] \cdot \mathbb{P}(X_1 \neq i, \dots, X_{n_0-1} \neq i, X_n = j | X_0 = i)$$

$$= (n_0 + \mathbb{E}[T_i^R | X_0 = j]) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(X_1 \neq i, \dots, X_{n_0-1} \neq i, X_n = j | X_0 = i)}_{\neq 0}$$

Tedy: $\mathbb{E}[T_i^R | X_0 = j] < +\infty$.

- Nechť $X_0 = i$ a $\{Y_m : m \geq 1\}$ jsou stejně rozdělené jako T_i^R při $X_0 = i$

  ... Y_m ... intervaly mezi návraty do i

  $Y_m := \inf\{l \geq 1 : X_{Y_{m-1} + \dots + Y_1 + l} = i\}$, $Y_1 = \inf\{l \geq 1 : X_l = i\}$

  ... n-tý návrat do i je v čase $Y_1 + \dots + Y_n$

  ... $\mathbb{E}[Y_l] = \mathbb{E}[T_i^R | X_0 = i] < +\infty$.

Nechť $p = \mathbb{P}(\{X_n\}$ navštíví j před tím, než se vrátí do $i \mid X_0 = i)$

Pak $p \geq \mathbb{P}(X_1 \neq i, \dots, X_{m_0 - 1} \neq i, X_m = j \mid X_0 = i) \neq 0$ ... $p > 0$

↳ Pokaždé, když se stav vrátí do i, tak má řetězec pravděpodobnost $p > 0$, že se dostane do j dřív než se opět vrátí do i

↳ Pokud N je počet návratů do i před prvním příchodem do j, pak N má geom. rozdělení s parametrem p ... $\mathbb{P}(N = k) = p(1-p)^k$, $k \geq 0$

↳ Pro $X_0 = i$ je $T_j^R \leq Y_1 + \dots + Y_{N+1}$ a tedy $\mathbb{E}[T_j^R | X_0 = i] \leq \mathbb{E}(N+1)\mathbb{E}(Y) < +\infty$.

- Konečně $\mathbb{E}[T_j^R | X_0 = j] \leq \mathbb{E}[T_i^R | X_0 = j] + \mathbb{E}[T_j^R | X_0 = i] < +\infty$.

  Délka trajektorie z j do j je nejvýše její délka z j do i a pak z i do j

5, Periodičnost a aperiodičnost

Pro $i \in S$ definujeme periodu i jako ~~nejmenšího~~ největšího společného dělitele $\{n \geq 1 : [P^n]_{ii} > 0\}$.

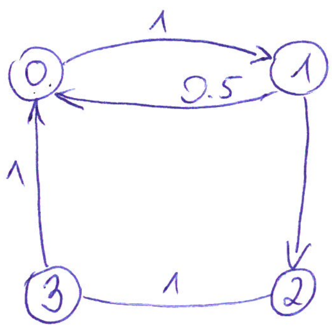
Stav s periodou 1 je aperiodický, zejména tedy pokud $P_{ii} > 0$.

Řetězec je aperiodický, pokud jsou všechny jeho stavy aperiodické.

Stejně tak, řetězec je rekurentní, poz. rekurentní, – pokud všechny jeho stavy jsou rekurentní, poz. rekurentní, –

Pokud je $[P^n]_{ii} = 0$ pro všechna $n \geq 1$, stav $i \in S$ má periodu 0.

Příklad:

- 

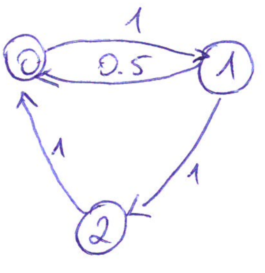
$\{n \geq 1 : [P^n]_{00} > 0\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

stejné pro $j = 1$

$\{n \geq 1 : [P^n]_{22} > 0\} = \{4, 6, 8, 10, \ldots\}$

& stejné pro 3 ...

všechny stavy mají periodu 2.

- 

$0: 2, 3, \ldots \qquad 1$

$1: 2, 3, \ldots \qquad 1$

$2: 3, 5, \ldots \qquad 1$

Věta: Každé dva komunikující stavy mají stejnou periodu

Důkaz: Pro $i, j \in S$, $i \leftrightarrow j$, označme $d(i)$ periodu i a $d(j)$ periodu j.
Pro $\alpha := [P^k]_{ij} > 0$ a $\beta = [P^l]_{ji} > 0$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{N}$ je $\overbrace{[P^{k+l}]_{ii}}^{\geq \alpha\beta} > 0$ a tedy $d(i)$ dělí $k+l$. Pro lib. $m \in \mathbb{N}$ s $[P^m]_{jj} > 0$ je pak i $[P^{k+l+m}]_{ii} > 0$ (Lze jít $i \xrightarrow{k} j$, $j \xrightarrow{m} j$, $j \xrightarrow{l} i$). Tedy $d(i)$ dělí i $k+l+m$, tedy $d(i)$ dělí i m.
Tedy $d(i)$ je společný dělitel $\{m \in \mathbb{N} : [P^m]_{jj} > 0\}$ a $d(j) \geq d(i)$. $\square$