4. Analýza prvního kroku

1, Pravděpodobnosti dosažení

Nechť $Z=(Z_n)_{n=0}^{\infty}$ je Markovův řetězec se stavovým prostorem S a $A\subset S$. První čas, kdy Z se dostane do A označme

$$T_A=\inf\{n\geq 0: Z_n\in A\}.$$

Pokud $Z_0\in A$, pak $T_A=0$

a pokud $\{n\geq 0: Z_n=A\}=\emptyset$, pak $T_A=+\infty$.

Podobně k příkladu zruinování hráče chceme spočítat

$$g_l(k)=\mathbb{P}(Z_{T_A}=l\mid Z_0=k),\quad l\in A$$

pravděpodobnost dosažení množiny A přes bod $l\in A$

Pro $k\in S\setminus A$ je $T_A\geq 1$ při $Z_0=k$ a

$$g_l(k)=\mathbb{P}(Z_{T_A}=l\mid Z_0=k)=\sum_{m\in S}\mathbb{P}(Z_{T_A}=l\mid Z_1=m)\cdot\mathbb{P}(Z_1=m\mid Z_0=k)$$

$$=\sum_{m\in S}P_{k,m}\,\mathbb{P}(Z_{T_A}=l\mid Z_1=m)=\sum_{m\in S}P_{k,m}\,\mathbb{P}(Z_{T_A}=l\mid Z_0=m)$$

$$=\sum_{m\in S}P_{k,m}\,g_l(m),\quad k\in S\setminus A,\ l\in A.$$

Dále máme okrajové podmínky $g_l(k)=\mathbb{P}(Z_{T_A}=l\mid Z_0=k)=\begin{cases}1 & \text{pro } k=l\\ 0 & \text{pro } k\neq l\end{cases}$

$k\in A,\ l\in A$.

Předchozí rovnice zapišme maticově: Označme (pro $l \in A$)

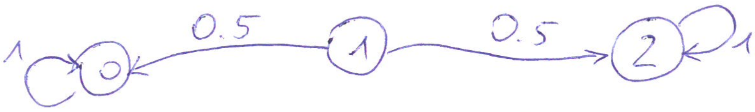
$g_l = (g_l) = (g_l(k))_{k \in S}$ sloupcový vektor a P matici pravděpodobností přechodu $P = (P_{km})_{k,m \in S}$. Pak

- $g_l = P g_l$ ... i.e. $g_l(k) = \sum_{m \in S} P_{km} g_l(m)$, $l \in A$
- $g_l(k) = \begin{cases} 1 \ldots k = l \\ 0 \ldots k \neq l \end{cases}$; $k \in A$

Dále platí $1 = \mathbb{P}(T_A = +\infty \mid Z_0 = k) + \sum_{l \in A} \mathbb{P}(Z_{T_A} = l \mid Z_0 = k)$

$= \mathbb{P}(T_A = +\infty \mid Z_0 = k) + \sum_{l \in A} g_l(k)$ pro všechny $k \in S$.

Poznámka: 1) $\mathbb{P}(T_A = +\infty \mid Z_0 = k) > 0$ nastane např. pro $A = \{0\}$, $k = 1$ a



2) Pro stavový prostor $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ a matici přechodu P ve tvaru

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ \Theta & I \end{bmatrix}, \quad Q \ldots (r+1) \times (r+1); \ R \text{ je } (r+1) \times (N-r)$$

a $I = Id = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$ je $(N-r) \times (N-r)$ matice

Stavům $r+1, \ldots, N$ se říká absorpční ... po jejich dosažení v nich proces již zůstává!

Pro $A = \{r+1, \dots, N\}$ množinu absorbujících stavů pak platí

- $g_\ell(m) = \begin{cases} 1, & \ell = m \\ 0, & \ell \neq m \end{cases}$; $r+1 \leq \ell \leq N,\ r+1 \leq m \leq N.$

- $g_\ell(k) = \sum_{m=0}^{N}{}' P_{k,m}\, g_\ell(m) = \sum_{m=0}^{r}{}' P_{k,m}\, g_\ell(m) + \sum_{m=r+1}^{N}{}' P_{k,m}\, g_\ell(m)$

$$= \sum_{m=0}^{r}{}' Q_{k,m}\, g_\ell(m) + \underbrace{P_{k,\ell}}_{=R_{k,\ell}}$$

$0 \leq k \leq r$

$r+1 \leq \ell \leq N$

2, Střední doba dotyku a absor~~…~~pce

Střední doba dotyku $h_A(k) = \mathbb{E}[T_A \mid Z_0 = k]$ množiny $A \subset S$ při začátku v $k \in S$. Zřejmě $h_A(k) = 0$ pro všechna $k \in A$.

Dále, pro všechna $k \in S \setminus A$ dostaneme

$$h_A(k) = \mathbb{E}[T_A \mid Z_0 = k] = \sum_{\ell \in S}{}' \mathbb{P}(Z_1 = \ell \mid Z_0 = k)\left(1 + \mathbb{E}[T_A \mid Z_0 = \ell]\right)$$

$$= \sum_{\ell \in S}{}' \mathbb{P}(Z_1 = \ell \mid Z_0 = k) + \sum_{\ell \in S}{}' \mathbb{P}(Z_1 = \ell \mid Z_0 = k)\, \mathbb{E}[T_A \mid Z_0 = \ell]$$

$$= 1 + \sum_{\ell \in S}{}' P_{k,\ell}\, h_A(\ell),\quad k \in S \setminus A.$$

Celkem tedy
- $h_A(k) = 1 + \sum_{\ell \in S}{}' P_{k,\ell}\, h_A(\ell),\quad k \in S \setminus A,$
- $h_A(\ell) = 0,\quad \ell \in A$

Dosazením: $h_A(k) = 1 + \sum'_{l \in S \setminus A} P_{kl} h_A(l), \; k \in S \setminus A$

... maticová rovnice pro $\{h_A(k)\}_{k \in S \setminus A}$.

Pro $P = \begin{bmatrix} Q & R \\ \Theta & I \end{bmatrix}$ a $A = \{r+1, \dots, N\}$ dostaneme

$$h_A(k) = 1 + \sum_{l=0}^{N}{}' P_{kl} h_A(l) = 1 + \sum_{l=0}^{r}{}' P_{kl} h_A(l) + \sum_{l=r+1}^{N}{}' P_{kl} h_A(l)$$

$$= 1 + \sum_{l=0}^{r}{}' P_{kl} h_A(l), \quad 0 \le k \le r \quad \text{... soustava pro } \{h_A(k)\}_{k=0}^{r}$$

3, Čas prvního návratu $\qquad (X \longrightarrow Z)?$

$$T_j^r = \inf\{n \ge 1 : Z_n = j\} \;\text{ s }\; T_j^r = +\infty \text{ pokud } X_n \ne j \text{ pro všechna } n \ge 1.$$

... podobný času dotyku, jen s $n \ge 1$... jde tedy o návrat.

Tedy $T_j^r = T_j$ pokud $Z_0 \ne j$.

Označme $\mu_j(i) = \mathbb{E}[T_j^r \mid X_0 = i] \ge 1$ střední dobu návratu do $j \in S$ při startu z $i \in S$.

Použijeme opět analýzu prvního kroku:

$$\mu_j(i) = \mathbb{E}[T_j^r \mid X_0 = i] = 1 \times \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i) + \sum_{\substack{l \in S \\ l \ne j}}{}' \mathbb{P}(X_1 = l \mid X_0 = i)(1 + \mathbb{E}[T_j^r \mid X_0 = l])$$

$$= P_{ij} + \sum_{l \ne j}{}' P_{il}(1 + \mu_j(l)) = P_{ij} + \sum_{l \ne j}{}' P_{il} + \sum_{l \ne j}{}' P_{il}\mu_j(l)$$

$$= \sum_{l \in S}{}' P_{il} + \sum_{l \ne j}{}' P_{il}\mu_j(l) = 1 + \sum_{l \ne j} P_{il}\mu_j(l).$$

Celkem tedy $\mu_j(i) = 1 + \sum_{l \neq j}' P_{il}\, \mu_j(l)$, $i, j \in S$

Poznámka: Pro $i \in S$ je $h_i(i) = 0$ ale $\mu_i(i) \geq 1$.

Pro $i \neq j$ je ale $h_i(j) = \mathbb{E}[T_i^R \mid Z_0 = j] = \mathbb{E}[T_i \mid Z_0 = j] = \mu_i(j)$

Pro $i = j$ je $\mu_j(j) = \sum_{l \in S}' P_{jl}(1 + h_j(l)) = \sum_{l \in S}' P_{jl} + \sum_{l \in S}' P_{jl} h_j(l)$

$$= 1 + \sum_{l \neq j}' P_{jl} h_j(l).$$

4, Počet návratů

Pravděpodobnost návratu: $\rho_{ij} = \mathbb{P}(T_j^R < +\infty \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(X_n = j \text{ pro nějaké } n \geq 1 \mid X_0 = i)$

Pak $\rho_{ii} = \mathbb{P}(Z_n = i \text{ pro nějaké } n \geq 1 \mid Z_0 = i)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = i, Z_{n-1} \neq i, \dots, Z_1 \neq i \mid Z_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)},$$

kde $f_{ij}^{(n)} := \mathbb{P}(T_j^R = n \mid X_0 = i) = \mathbb{P}(X_n = j, X_{n-1} \neq j, Z_{n-2} \neq j, \dots, Z_1 \neq j \mid Z_0 = i)$

$i, j \in S$ s $f_{ii}^{(0)} = \mathbb{P}(T_i^R = 0 \mid Z_0 = i) = 0$ a $f_{ii}^{(1)} = \mathbb{P}(X_1 = i \mid X_0 = i) = P_{ii}$

Střední ~~celkem~~ hodnota počtu návratů

$R_i = \#\{n \geq 1 : X_n = i\}$ ... počet příchodů do stavu i .. $R_i \in \{0, 1, \dots\} \cup \{+\infty\}$

Dále $\mathbb{P}(R_j = 0 \mid X_0 = i) = 1 - \rho_{ij}$

4, Počet návratů

- Počet průchodů do stavu i: $R_i = \#\{n \geq 1 : X_n = i\}$

  - náhodná veličina s $R_i \in \{0,1,2,\dots\} \cup \{+\infty\}$

Zajímá nás $\mathbb{E}[R_j \mid Z_0 = i]$

- Nejdříve ale zavedeme

  - Pravděpodobnost návratu: $P_{ij} = \mathbb{P}(T_j^r < +\infty \mid Z_0 = i)$

    $= \mathbb{P}(Z_n = j$ pro nějaké $n \geq 1 \mid Z_0 = i)$

- Jak vypočítat P_{ij}?

  - $P_{ij} = \mathbb{P}(Z_n = j$ pro nějaké $n \geq 1 \mid Z_0 = i)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(Z_n = j, Z_{n-1} \neq j, \dots, Z_1 \neq j \mid Z_0 = i)}_{=: f_{ij}^{(n)}} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$$

- není vlastní analýza prvního kroku, ale analýza prvního návratu

- $f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(T_j^r = n \mid Z_0 = i)$; $f_{ij}^{(0)} = 0$, $f_{ij}^{(1)} = P_{ij}$.

- Výpočet $f_{ij}^{(n)}$? $[P^n]_{ij} = \mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_0 = i) =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(Z_n = j, Z_k = j, Z_{k-1} \neq j, \dots, Z_1 \neq j, Z_0 = i)}{\mathbb{P}(Z_0 = i)} \cdot \frac{\mathbb{P}(Z_k = j, Z_{k-1} \neq j, \dots, Z_1 \neq j, Z_0 = i)}{\text{-- '' --}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_k = j, Z_{k-1} \neq j, \dots, Z_1 \neq j, Z_0 = i) \cdot \mathbb{P}(Z_k = j, Z_{k-1} \neq j, \dots, Z_1 \neq j \mid Z_0 = i)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_k = j) f_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z_{n-k} = j \mid Z_0 = j) f_{ij}^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} [P^{n-k}]_{jj}$$

- Celkem tedy: • $f_{ij}^{(n)}$ vypočteme z konvoluční identity & okrajových podmínek pro $n=1$
  - Pak dopočteme $P_{ij} = \sum_n f_{ij}^{(n)}$.
- Máme-li P_{ij}, můžeme najít rozložení R_i!

$\mathbb{P}(R_j = m \mid Z_0 = i)$: • Trajektorie se dostane z i do j (P_{ij})
- Pak se ještě $(m-1)\times$ vrátí do j (P_{jj}^{m-1})
- Pak už se nikdy nevrátí $(1-P_{jj})$

Celkem $\mathbb{P}(R_j = m \mid Z_0 = i) = \begin{cases} P_{ij} \times P_{jj}^{m-1} \times (1-P_{jj}), & m \geq 1. \\ 1-P_{ij}, & m = 0 \end{cases}$

- Nyní můžeme vypočíst:

$$\mathbb{P}(R_j < +\infty \mid Z_0 = i) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(R_j = m \mid Z_0 = i) = 1 - P_{ij} + \sum_{m=1}^{\infty} P_{ij} \cdot P_{jj}^{m-1} \cdot (1-P_{jj})$$

$$= \begin{cases} (P_{jj} = 1): & 1 - P_{ij} \\ (P_{jj} < 1): & 1 - P_{ij} + (1-P_{jj}) P_{ij} \sum_{m=1}^{\infty} P_{jj} = 1 - P_{ij} + \dfrac{(1-P_{jj}) P_{ij}}{1-P_{jj}} = 1. \end{cases}$$

A tedy $\mathbb{P}(R_j = +\infty \mid Z_0 = i) = \begin{cases} P_{ij} & \text{pro } P_{jj} = 1, \\ 0 & \text{pro } P_{jj} < 1 \end{cases}$

A speciálně pro $i = j$: $\mathbb{P}(R_i < +\infty \mid Z_0 = i) = \begin{cases} 0 & \text{pro } P_{ii} = 1, \\ 1 & \text{pro } P_{ii} < 1 \end{cases}$

$$\mathbb{P}(R_i = +\infty \mid Z_0 = i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } P_{ii} = 1, \\ 0 & \text{pro } P_{ii} < 1. \end{cases}$$

• A konečně dopočteme $\mathbb{E}[R_j | Z_0 = i]$:

• Pokud $P_{jj} = 1$

Pak $\mathbb{P}(R_j = +\infty | Z_0 = i) = P_{ij}$

Pro $P_{jj} = 1$ & $P_{ij} > 0$ je tedy $\mathbb{E}[R_j | Z_0 = i] = +\infty$

Pro $P_{jj} = 1$ & $P_{ij} = 0$ je $(i \neq j)$

$$\mathbb{E}[R_j | Z_0 = i] = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \underbrace{\mathbb{P}(R_j = m | Z_0 = i)}_{=0} + (+\infty) \underbrace{\mathbb{P}(R_j = +\infty | Z_0 = i)}_{=0} = 0$$

• Pokud $P_{jj} < 1$: $\mathbb{P}(R_j = +\infty | Z_0 = i) = 0$ a tedy

$$\mathbb{E}[R_j | Z_0 = i] = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \mathbb{P}(R_j = m | Z_0 = i) + (+\infty) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(R_j = +\infty | Z_0 = i)}_{=0}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot P_{ij} \cdot P_{jj}^{m-1} (1 - P_{jj}) = P_{ij} (1 - P_{jj}) \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} m P_{jj}^{m-1}}_{= \frac{1}{(1 - P_{jj})^2}}$$

$$= \frac{P_{ij}}{1 - P_{jj}}.$$