Markovské procesy

LS 2023/24, FJFI ČVUT

3. Cvičení

1. (Poissonovská slepice). Poissonovská slepice Máša naklade N vajec, kde N má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Protože se kolem Máši pohybuje i kohout Čeněk, tak se z vajec mohou líhnout kuřata. Z vajíčka se vylíhne kuře s pravděpodobností $p \in (0, 1)$ nezávisle na ostatních vejcích. S jakou pravděpodobností bude Máša pyšnou matkou právě tří kuřat?

2. (Mendelova zahrádka) Na zahrádce pěstujeme hrách a sledujeme vývoj genu, který se vyskytuje ve dvou formách, a sice G nebo g. Hrách má vždy pár těchto genů, tedy buď GG (dominantní), Gg (smíšený=hybridní, na pořadí nezáleží a Gg je totéž jako gG), a gg (recesivní). Při křížení zdědí nová rostlina náhodně jeden z genů každého rodičů.

   Začněme s hrachem daného typu a zkřižíme ho s hybridem. Tento dále křížíme s hybridem, a tak dále, dalšími kříženími s hybridem.

   (i) Napište matici přechodu takto definovaného Markovského řetězce.

   (ii) Předpokládejme, že začneme s hybridem. Vypočtěte pravděpodobnosti $\mu_n(GG), \mu_n(Gg), \mu_n(gg)$ toho, že v n-té generaci má rostlina geny GG, Gg, resp. gg.

3. Vedoucí katedry statistiky má 4 deštníky, některé doma a některé v kanceláři. Deštník si s sebou bere jen když prší, jinak jde bez deštníku. Může se ale bohužel stát, že všechny deštníky jsou na jednom místě a vedoucí odchází z druhého místa a prší. V tom případě zmokne.

   - Pokud pravděpodobnost deště je p, jaká je pravděpodobnost, že vedoucí zmokne?
   - V Edinburghu je možné předpokládat $p = 0.6$. Kolik deštníků bude potřebovat vedoucí tamní katedry statistiky, aby pravděpodobnost zmoknutí byla menší než 1%?

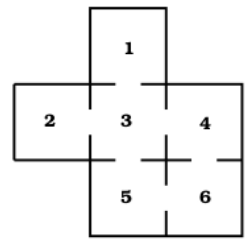
4. Hosté na party hrají hru. Každý host dá jednu ponožku (nebo jinou část oděvu) do pytle. Poté je pytel zamíchán a každý si (náhodně a rovnoměrně) vytháhne jeden kus oděvu. Jaká je pravděpodobnost p_n, že při n hostech si žádný host nevytáhne svůj kus oděvu.

5. Smith je ve vězení a má 3 dolary. Ven se dostane, když bude mít 8 dolarů. Žalářník souhlasil, že si s ním zahraje následující hru. V každém kole vsadí Smith A dolarů. S pravděpodobností 0.4 vyhraje a dostane A dolarů, s pravděpodobností 0.6 prohraje a o A dolarů přijde. Nalezněte pravděpodobnost, že Smith vyhraje dříve než prohraje všechny své peníze, pokud

   (i) Sází vždy jeden dolar.

   (ii) Sází vždy co nejvíce, ale ne více než je nutné pro dosažení osmi dolarů.

6. V bludišti běhá krysa. V každém kroce vyběhne náhodně jedněmi dveřmi z místnosti, ve které se právě nachází.



(i) Napište matici přechodu pravděpodobností příslušného Markovského řetězce.

(ii) Najděte stacionární rozložení.

(iii) Krysa začíná v první místnosti. Jaká je střední doba návratu do první místnosti?

(iv) Krysa začíná v první místnosti, v paté místnosti je past s kusem sýra. Jaká je střední doba prvního (a posledního...) příchodu do páté místnosti?

7. Markovský řetězec se stavy $\{1, 2, 3\}$ má matici přechodu pravděpodobností

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ukažte, že stav 3 je absorbující a spočtěte střední dobu do absorpce, začínáme-li ze stavu 1.