Markovské procesy

LS 2023/24, FJFI ČVUT

2. Cvičení

Ruinování hráče

1. Uvažujme problém ruinování hráče s možností remízy. Při celkovém počtu S mincí a pokud X_n je majetek hráče A po n kolech hry, tak se v $n+1$ kole majetek A zvýší o 1 s pravděpodobností $r \in (0, 1/2]$, sníží o 1 s toutéž pravděpodobností, a zůstane stejný s pravděpodobností $1 - 2r$. Označme

$$f(k) := \mathbb{P}(R_A | X_0 = k)$$

pravděpodobnost ruinování hráče A a nechť

$$h(k) := \mathbb{E}[T_{0,S} | X_0 = k]$$

je střední doba hry při startu v $X_0 = k$, $0 \leq k \leq S$.

   (a) Použitím analýzy prvního kroku napište diferenční rovnici pro $f(k)$ a příslušné okrajové podmínky. Těmto rovnicím budeme říkat *homogenní rovnice.*

   (b) Vyřešte rovnice z bodu (a). Odpovídá řešení Vaší intuici?

   (c) Užitím analýzy prvního kroku napište diferenční rovnici pro $h(k)$ a příslušné okrajové podmínky.

   (d) Najděte řešení rovnic z bodu (c); bude se jednat o součet homogenního a partikulárního řešení.

   (e) Najděte limitu střední doby hry pro $r \to 0$.

2. Uvažujme proces ruinování hráče, při kterém se hráč může vrátit do hry i když už jeho majetek klesl na nulu. Konkrétně, pro $S \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = k+1 | X_n = k) &= p, \quad 0 \leq k \leq S-1, \\
\mathbb{P}(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) &= q = 1-p, \quad 1 \leq k \leq S-1, \\
\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = q, &\quad \mathbb{P}(X_{n+1} = S | X_n = S) = 1.
\end{aligned}$$

Konečně označme

$$W = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n = S\}$$

událost vítězství hráče A.

   (a) Interpretujte tento model jako "kasina pro děti" a "hlemýždě lezoucího na větev ve výšce S".

   (b) Nechť $f(k) = \mathbb{P}(W | X_0 = k)$ je pravděpodobnost, že hráč zvítězí (tedy dosáhne v nějakém čase $n \in \mathbb{N}_0$ stavu $X_n = S$) při startu v $X_0 = k$. Napište diferenční rovnici pro $f(k)$ a okrajové podmínky.

(c) Spočtěte $\mathbb{P}(W|X_0 = k)$ pro všechna $k = 0, 1, \ldots, S$ řešením rovnic z (a).

(d) Nechť $T_S = \inf\{n \geq 0 : X_n = S\}$ je čas prvního dosažení stavu S a nechť $g(k) = \mathbb{E}[T_S|X_0 = k]$ je střední délka hry. Napište diferenční rovnice pro $g(k)$.

(e) Spočtěte $g(k)$ z rovnic v (d).

(f) Nechť $T_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$ je čas prvního dosažení nulové hladiny. Napište $p_k := \mathbb{P}(T_S < T_0|X_0 = k)$ jako funkce p, S a $k \in \{0, 1, \ldots, S\}$.

(g) Zdůvodněte (stačí slovně) identitu $(0 < k \leq S - 1)$

$$\mathbb{P}(T_S < T_0|X_1 = k + 1, X_0 = k) = \mathbb{P}(T_S < T_0|X_1 = k + 1) = \mathbb{P}(T_S < T_0|X_0 = k + 1).$$

(h) Ukažte, že

$$\mathbb{P}(X_1 = k+1|X_0 = k, T_S < T_0) = p\frac{\mathbb{P}(T_S < T_0|X_0 = k + 1)}{\mathbb{P}(T_S < T_0|X_0 = k)} = p\frac{p_{k+1}}{p_k}, \quad 1 \leq k \leq S-1.$$

(i) Podobně spočtěte $\mathbb{P}(X_1 = k - 1|X_0 = k, T_0 < T_S)$, $1 \leq k \leq S$.

(j) Pro $h(k) = \mathbb{E}[T_S|X_0 = k, T_S < T_0]$, $k = 1, \ldots, S$ je střední doba hry za předpokladu, že stavu 0 není nikdy dosaženo. Napište diferenční rovnice pro h a vyřešte je pro $p = 1/2$.