Sochockého vzorce

Václav Klika

November 9, 2009

Jedná se o vztah mezi dvěma způsoby regularizace funkce $\frac{1}{x}$, kterou není možno použít jako generátor regulární zobecněné funkce. Jeden ze způsobů regularizace se zavádí pomocí integrálu ve smyslu hlavní hodnoty

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi(x)\right)=\mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x,\ \forall\varphi\in\mathscr{D}.$$

Upravme si nejprve tento vyraz do jiného tvaru

$$\mathrm{Vp}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\mathbf{R}\smallsetminus(-\varepsilon,\varepsilon)}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x\Big]=$$
$$=\Big|\tilde{x}=-x\Big|=\lim_{\varepsilon\to0^+}\Big[-\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{\tilde{x}}\varphi(-\tilde{x})\mathrm{d}\tilde{x}+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x=$$
$$=\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

Poslední rovnost platí kvůli tomu, že integrand je spojitá funkce pro $x\to0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}=2\varphi'(0)$$

a existuje integrabilní majoranta nezávislá na ε pro $\forall x\in(0,\infty)$

$$\chi_{(\varepsilon,\infty)}(x)\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\le\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\le K$$

z faktu, že $\varphi\in\mathscr{D}$ a z použití věty o střední hodnotě:

$$\varphi(x)-\varphi(-x)=\big(x-(-x)\big)\varphi'(\xi)=2x\varphi'(\xi),\ \xi\in(-x,x).$$

Nyní zbývá si uvědomit, že každá testovací funkce má spojitou derivaci a tedy existuje nějaké maximum K na jejím (kompaktním) definičním oboru. Celkem tedy

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\varphi(x)\right)=\int_{0}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}.$$

(Rozmyslete, odkud víme, že $\mathcal{P}\frac{1}{x}\in\mathscr{D}'$.)

Další způsob regularizace vytváří přímo z funkce $\frac{1}{x}$, která není lokálně integrabilní, funkci novou, která již lokálně integrabilní je a tedy existuje její jednoznačný protějšek v $\mathscr{D}'$ (je jejím generátorem)

$$\frac{1}{x\pm i0}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{x\pm i\varepsilon}\ \text{v } \mathscr{D}',\ \text{kde } \tfrac{1}{x\pm i\varepsilon}\in\mathrm{L}^1_{loc}.$$

Sochockého vzorec ukážeme pro variantu se znaménkem plus. Prostým použitím vlastnosti regulárnosti zobecněných funkcí dostáváme

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon},\varphi(x)\right)=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\mathbf{R}}\frac{\varphi(x)}{x+i\varepsilon}\mathrm{d}x.$$

Vidíme, že se jedná o integrál z komplexní funkce. Přepíšeme si proto integrand ve tvaru reálné a imaginární části, kteréžto spočítáme zvlášť

$$\frac{1}{x+i\varepsilon} = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2} - i\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

.

A tedy pro imaginární část máme

$$-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\mathtt{d}x = \left|y = \frac{1}{\varepsilon}x\right| = -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbf{R}} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{y^2+1}\mathtt{dy} =$$
$$= -\varphi(0)\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{y^2+1}\mathtt{dy} = -\pi\varphi(0) = \big(-\pi\delta(x), \varphi(x)\big),$$

kde záměna limity a integrálu byla možná kvůli existenci integrabilní majoranty zaručené omezeností funkce $\varphi(x)$ na $\mathbf{R}$ a existencí konečného integrálu $\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{y^2+1}$.

Pro reálnou část platí tyto rovnosti

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\mathbf{R}} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\mathtt{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Big[\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\mathtt{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\mathtt{d}x\Big] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\big(\varphi(x)-\varphi(-x)\big)\mathtt{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right)\mathtt{d}x =$$
$$= \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathtt{d}x = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right).$$

Zde záměna v předposlední rovnosti je zaručená jednak tím, že funkce $\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}$ nabývá hodnot z $\langle 0, 1\rangle$ a dále z toho, že $\varphi \in \mathscr{D}$. Totiž, jak již bylo zmíněno, potom $|\varphi(x) - \varphi(-x)| \leq 2|x|K$ což je to samé jako $\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right| \leq 2K$ a navíc $\varphi(x)$ má omezený nosič. Přesněji to samé zápisem:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right)\mathtt{d}x = \int_{0}^{L} \frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\right)\mathtt{d}x \leq$$
$$\leq \int_{0}^{L} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\mathtt{d}x \leq \int_{0}^{L} 2K = 2KL < \infty,$$

čímž jsme ukázali, že existuje integrabilní majoranta a je možné provést záměnu limimty a integrálu, jak bylo provedeno.

Celkem tedy dostáváme vztah (nazývaný Sochockého vzorec)

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \text{ v } \mathscr{D}'.$$