Stellenwertsysteme

Adam Blažek

21. November 2023

Definition

Ein *Stellenwertsystem* ist ein System für Representation der Zahlen. Es besteht von einer *Basis* β und einer endlichen Menge *Ziffern* $\mathscr{A}$.

Definition

Ein *Stellenwertsystem* ist ein System für Representation der Zahlen. Es besteht von einer *Basis* β und einer endlichen Menge *Ziffern* $\mathscr{A}$.

Eine *Representation* im Stellenwertsystem ist eine endliche Folge $x_n \cdots x_0$ von Ziffern, deren *Wert* ist definiert als

$$(x_n \cdots x_0)_\beta := \sum_{k=0}^{n} x_k \beta^k = x_n \beta^n + \cdots + x_1 \beta^1 + x_0 \beta^0$$

Definition

Ein *Stellenwertsystem* ist ein System für Representation der Zahlen. Es besteht von einer *Basis* β und einer endlichen Menge *Ziffern* $\mathscr{A}$.

Eine *Representation* im Stellenwertsystem ist eine endliche Folge $x_n \cdots x_0$ von Ziffern, deren *Wert* ist definiert als

$$(x_n \cdots x_0)_\beta := \sum_{k=0}^{n} x_k \beta^k = x_n \beta^n + \cdots + x_1 \beta^1 + x_0 \beta^0$$

Beispiel

Im *Dezimalsystem* mit $\beta = 10$, $\mathscr{A} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$:

$$(2023)_{10} = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 2000 + 20 + 3$$

Definition

Ein *Stellenwertsystem* ist ein System für Representation der Zahlen. Es besteht von einer *Basis* β und einer endlichen Menge *Ziffern* $\mathscr{A}$.

Eine *Representation* im Stellenwertsystem ist eine endliche Folge $x_n \cdots x_0$ von Ziffern, deren *Wert* ist definiert als

$$(x_n \cdots x_0)_\beta := \sum_{k=0}^{n} x_k \beta^k = x_n \beta^n + \cdots + x_1 \beta^1 + x_0 \beta^0$$

Beispiel

Im *Dezimalsystem* mit $\beta = 10$, $\mathscr{A} = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$:

$$(2023)_{10} = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 2000 + 20 + 3$$

In Computern wird ein Stellenwertsystem mit der Basis 2 and den Ziffern $\{0, 1\}$ verwendet.

Geschichte

Stellenwertsysteme wurden unabhängig in einigen Kulturen entwickelt.

Geschichte

Stellenwertsysteme wurden unabhängig in einigen Kulturen entwickelt.

Im **Babylon** hat man ein Stellenwertsystem mit der Basis 60 benutzt. Es ist ein der altesten Stellenwertsysteme in der Welt.

Geschichte

Stellenwertsysteme wurden unabhängig in einigen Kulturen entwickelt.

Im **Babylon** hat man ein Stellenwertsystem mit der Basis 60 benutzt. Es ist ein der altesten Stellenwertsysteme in der Welt.

Das Dezimalsystem hat seinen Ursprung in **Indien**. Es wurde nach Europa über Arabien von Leonardo da Pisa (**Fibonacci**) gebracht.

Geschichte

Stellenwertsysteme wurden unabhängig in einigen Kulturen entwickelt.

Im **Babylon** hat man ein Stellenwertsystem mit der Basis 60 benutzt. Es ist ein der altesten Stellenwertsysteme in der Welt.

Das Dezimalsystem hat seinen Ursprung in **Indien**. Es wurde nach Europa über Arabien von Leonardo da Pisa (**Fibonacci**) gebracht.

Das Stellenwertsystem war am beliebsten zwischen Kaufleuten, denn es macht Zählen viel einfacher als die römischen Zahlen.

Stellenwertsysteme mit nicht-natürlichen Basen

Die Basis für ein Stellenwertsystem muss nicht eine natürliche Zahl sein.

Stellenwertsysteme mit nicht-natürlichen Basen

Die Basis für ein Stellenwertsystem muss nicht eine natürliche Zahl sein.

Beispiel

$$\beta = -2, \quad \mathscr{A} = \{0, 1\}$$

$$(1011)_{-2} = 1 \cdot (-2)^3 + 0 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^1 + 1 \cdot (-2)^0 = -9$$

Stellenwertsysteme mit nicht-natürlichen Basen

Die Basis für ein Stellenwertsystem muss nicht eine natürliche Zahl sein.

Beispiel

$$\beta = -2, \quad \mathscr{A} = \{0, 1\}$$

$$(1011)_{-2} = 1 \cdot (-2)^3 + 0 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^1 + 1 \cdot (-2)^0 = -9$$

Beispiel

$$\beta = \sqrt{\pi}, \quad \mathscr{A} = \{0, 1\}$$

$$(100)_{\sqrt{\pi}} = 1 \cdot (\sqrt{\pi})^2 + 0 \cdot (\sqrt{\pi})^1 + 0 \cdot (\sqrt{\pi})^0 = \pi$$

Stellenwertsysteme mit nicht-natürlichen Basen

Die Basis für ein Stellenwertsystem muss nicht eine natürliche Zahl sein.

Beispiel

$$\beta = -2, \quad \mathscr{A} = \{0, 1\}$$

$$(1011)_{-2} = 1 \cdot (-2)^3 + 0 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^1 + 1 \cdot (-2)^0 = -9$$

Beispiel

$$\beta = \sqrt{\pi}, \quad \mathscr{A} = \{0, 1\}$$

$$(100)_{\sqrt{\pi}} = 1 \cdot (\sqrt{\pi})^2 + 0 \cdot (\sqrt{\pi})^1 + 0 \cdot (\sqrt{\pi})^0 = \pi$$

Beispiel (Penney-System)

$$\beta = \mathrm{i} - 1, \quad \mathscr{A} = \{0, 1\}$$

$$(1110100)_{\mathrm{i}-1} = \cdots = 2\mathrm{i}$$

Balancierte Stellenwertsysteme

$$b \in \mathbb{N},\ 2 \nmid b, \quad \mathscr{A} = \left\{-\frac{b-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{b-1}{2}\right\}$$

Balancierte Stellenwertsysteme

$$b \in \mathbb{N},\ 2 \nmid b, \quad \mathscr{A} = \left\{-\frac{b-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{b-1}{2}\right\}$$

Beispiel (balanciertes Ternarsystem)

$$b = 3, \quad \mathscr{A} = \{-1, 0, 1\} = \{\bar{1}, 0, 1\}$$

Balancierte Stellenwertsysteme

$$b \in \mathbb{N},\ 2 \nmid b, \quad \mathscr{A} = \left\{-\frac{b-1}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{b-1}{2}\right\}$$

Beispiel (balanciertes Ternarsystem)

$$b = 3, \quad \mathscr{A} = \{-1, 0, 1\} = \{\bar{1}, 0, 1\}$$

$$60 = (1\bar{1}1\bar{1}0)_3, \quad -60 = (\bar{1}1\bar{1}10)_3$$

Redundante Stellenwertsysteme

In manchen Stellenwertsystemen kann eine Zahl mehrere Representationen haben.

Redundante Stellenwertsysteme

In manchen Stellenwertsystemen kann eine Zahl mehrere Representationen haben.

Beispiel

$$b = 2, \quad \mathscr{A} = \{-1, 0, 1\} = \{\bar{1}, 0, 1\}$$

Redundante Stellenwertsysteme

In manchen Stellenwertsystemen kann eine Zahl mehrere Representationen haben.

Beispiel

$$b = 2, \quad \mathscr{A} = \{-1, 0, 1\} = \{\bar{1}, 0, 1\}$$

$$5 = (101)_2 = (11\bar{1})_2 = (10\bar{1}\bar{1})_2 = (1\bar{1}0\bar{1}\bar{1})_2$$

Zahlensysteme mit gemischten Basen

$$(x_n \cdots x_0)_\beta := \sum_{k=0}^{n} x_k \prod_{j=1}^{k} \beta_j = x_n \beta_1 \cdots \beta_n + \cdots + x_1 \beta_1 + x_0$$

Zahlensysteme mit gemischten Basen

$$(x_n \cdots x_0)_\beta \coloneqq \sum_{k=0}^{n} x_k \prod_{j=1}^{k} \beta_j = x_n \beta_1 \cdots \beta_n + \cdots + x_1 \beta_1 + x_0$$

Beispiel (die Uhr)

$$\underbrace{14}_{\substack{0\\\text{bis}\\23}} : \underbrace{28}_{\substack{0\\\text{bis}\\59}} : \underbrace{57}_{\substack{0\\\text{bis}\\59}} . \underbrace{369}_{\substack{0\\\text{bis}\\999}}$$

Zahlensysteme mit gemischten Basen

$$(x_n \cdots x_0)_\beta \coloneqq \sum_{k=0}^{n} x_k \prod_{j=1}^{k} \beta_j = x_n \beta_1 \cdots \beta_n + \cdots + x_1 \beta_1 + x_0$$

Beispiel (die Uhr)

$$\underbrace{14}_{\substack{0\\\text{bis}\\23}} : \underbrace{28}_{\substack{0\\\text{bis}\\59}} : \underbrace{57}_{\substack{0\\\text{bis}\\59}} . \underbrace{369}_{\substack{0\\\text{bis}\\999}}$$

Millisekunden vom Anfang des Tages:

$$14 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 1000 + 28 \cdot 60 \cdot 1000 + 57 \cdot 1000 + 369$$

Quellen

- https://www.studysmarter.de/schule/mathe/algebra/stellenwertsystem/
- Wikipedia: https://de.wikipedia.org/wiki/Stellenwertsystem
- W. Penney: *A "binary" system for complex numbers*, 1965
- Z. Masáková, E. Pelantová, M. Svobodová: *Algebraické metody v teoretické informatice*, 2023

Danke für Ihre Aufmerksamkeit