Původní materiál vznikl spojením všech (relevantních) částečných dokumentů Xournal++ naposledy upravených v AR 2020/2021

Současná verze může obsahovat opravy zanesené během výuky v LS AR 2021/22

15. 2. 2021

DIFR a

- přednáška ... teorie DR obecně (existence řešení, jednoznačnost..)
- cvičení ... počítání př. + teorie k jednotlivým typům DR

Co to je DR :

algebraické R	obyčejná diferenciální R řádu n
$x^2+2x-1=0 \qquad x=?$	$f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$
$f(x)=0 \qquad x=?$	
neznámá x (číslo)	neznámá funkce y
	$y=y(x)$
	y... závislé proměnná
	x... nezávislé proměnná

POZN (implicitní závislost)

$$f(x,y)=0 \qquad f(x,y(x))=0$$

$$x^2-2y=0$$

$$y(x)= \quad y=\frac{x^2}{2}$$

POZN : "Neobyčejné DR" = PARCIÁLNÍ DR

$$y=y(x_1,x_2,x_3,\dots,x_m)$$

$$f\left(x_1,\dots,x_m, y(\dots), \frac{\partial y}{\partial x_1}(\dots), \dots \frac{\partial y}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots\right)=0$$

Př zákon síly $m \cdot a = F$

$x=x(t)$ ... poloha hmotného bodu

$\frac{dx}{dt}=\dot{x}(t)$ ... rychlost

$\ddot{x}(t)$ ... zrychlení

$m\ddot{x} = F$ obyč. DR (ODR) 2. řádu

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \Rightarrow \dot{x} = \int \frac{F}{m}\,dt = \frac{F}{m}t + C_1$$ int. konst.

$$x(t) = \int \dot{x}\,dt = \int \frac{F}{m}t + C_1\,dt = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 + C_1 t + C_2$$

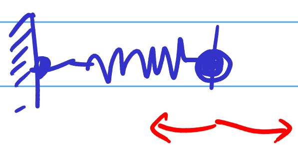
$\dot{x}(0) = C_1$ počáteční rychlost

$x(0) = C_2$ počáteční poloha

hodnoty int. konst zjistíme z tzv. POČÁTEČNÍCH PODMÍNEK

Př: $m\ddot{x} = F = -kx$

tuhost pružiny



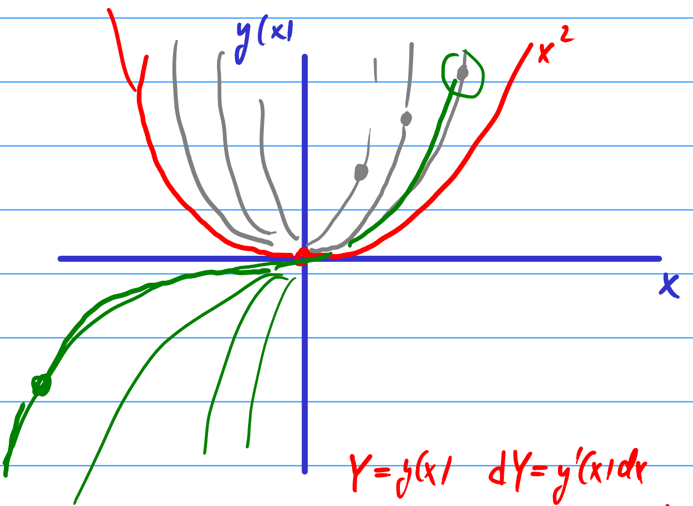
$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ LDR 2. řádu

$x(t) = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$ pokud $x(0)=0$

POJEM INTEGRÁLNÍ KŘIVKY A JEJÍ JEDNOZNAČNOSTI

$xy' - 2y = 0$

$y(0) = 0$



graf řešení DR $y=y(x)$ nazýváme int. křivkou

uhodneme: $y(x) = x^2$

$Y = y(x) \quad dY = y'(x)dx$

$xy' = 2y$

$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$

$$\int L\,dx = \int \frac{y'(x)dx}{y} = \int \frac{dY}{Y} = \ln|Y| = \ln|y(x)|$$

$$\int P\,dx = 2\ln|x| + \tilde{C} = 2\ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx^2|$$

$\int L = \int P$ $\qquad |y(x)| = |Cx^2| \qquad C \neq 0$

$$\boxed{y(x) = \pm Cx^2 = Cx^2} \leftarrow$$ po dosazení $C=0$ do rovnice zjišťujeme, že $C=0$ lze také použít

---

ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

rovnice ve tvaru $\qquad P(x) + Q(y)y' = 0 \qquad (*)$

I ... otevřený interval

„Kuchařka" – formální postup pro řešení

$$\int P(x) + Q(y)y'(x)\,dx = C$$

$$\int P(x)\,dx + \underbrace{\int Q(y)y'(x)\,dx}_{} = C$$

subst. $Y = y(x)$

$dY = y'(x)dx$

$$\int P(x)dx + \int Q(Y)\,dY = C \qquad (**)$$

je ve tvaru $H(x,Y) = C$ ... implicitní závislost Y na x

$Y = Y(x) = y(x)$

Pozn: někdy se píše $\quad P(x)dx + Q(y)dy = 0$

řešení $\quad \Vdash \int P(x)dx + \int Q(y)dy = C$

$H(x,y)$ je primitivní fce k dif formě

$$(\Leftarrow) \quad \frac{\partial H}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = Q$$

$$H(x, y(x)) = C \quad \Big| \ \frac{d}{dx}$$

$$\underbrace{\frac{\partial H}{\partial x}}_{P} \cdot 1 + \underbrace{\frac{\partial H}{\partial y}}_{Q} \cdot y' = 0$$

VĚTA: Nechť $P \in C(I)$, $Q \in C(J)$ kde $I = (a,b)$, $J = (c,d)$.
Potom platí

1. Každá funkce $y = y(x)$, která řeší $P(x) + Q(y)y' = 0 \}$ def $(*)$ na intervalu $I_1 \subset I$, splňuje na I_1 rovněž rovnici

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C \quad \text{pro jisté } C \in \mathbb{R}. \} \text{ def } (**)$$

2. Jestliže existuje $C \in \mathbb{R}$ a interval $I_2 \subset I$ a funkce $y \in C^1(I_2)$ taková, že platí $(**)$, potom y splňuje na I_2 i DR $(*)$.

Dk!

(1) dokázáno v kuchařce

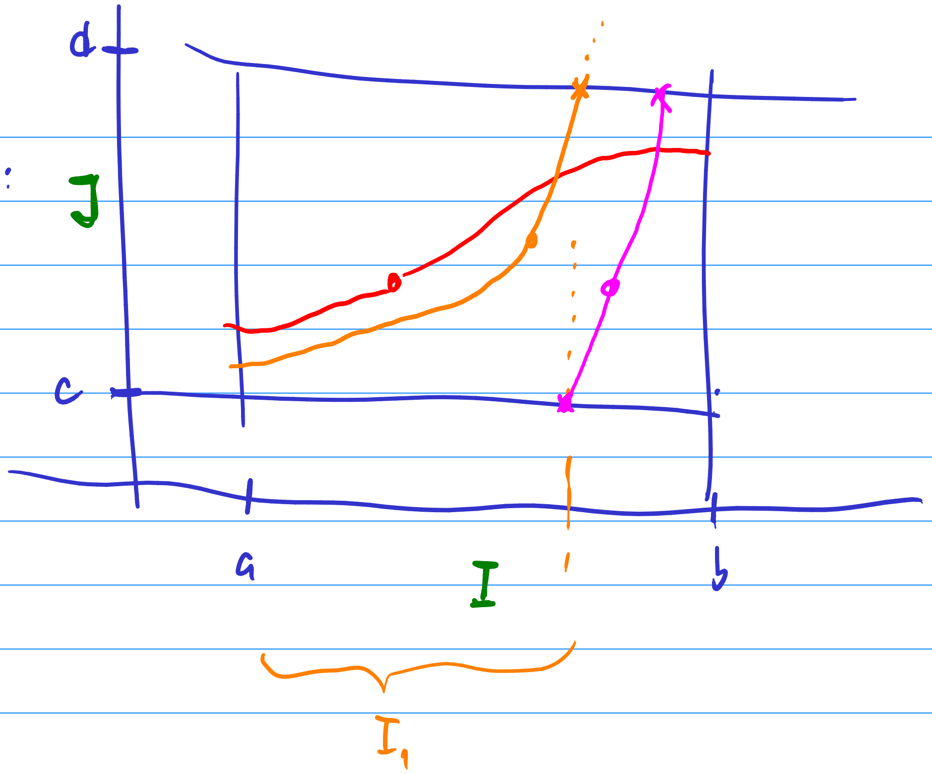
(2) $$\underbrace{\int P(x)dx}_{S(x)} + \underbrace{\int Q(y)dy}_{T(y(x))} = C \quad \Rightarrow \quad S \in C^1(I_2), \; T \in C^1(y(I_2))$$

$\Rightarrow$ lze provést

$$\frac{d}{dx}\Big(S(x) + T(y(x))\Big) =$$

$$= S'(x) + T'(y(x)) \cdot y'(x) = P(x) + Q(y) \cdot y' = 0 \quad \text{to je } (*) \quad \forall x \in I_2$$

Pozn.:



VĚTA O EXISTENCI A JEDNOZNAČNOSTI

Nechť $P \in C(I)$, $Q \in C(J)$, $I = (a, b)$, $J = (c, d)$
a nechť $(\forall y \in J)(Q(y) \neq 0)$ $\iff$ $0 \in Q(J)$

Potom každým bodem $(x_0, y_0) \in I \times J$ prochází právě jedno řešení rovnice $(*)$. (právě 1 integrální křivka)

Dk: 1) existence:

$$\text{def. } H(x,y) = S(x) + T(y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(\eta)\,d\eta$$

Protože $S \in C^1(I) \wedge T \in C^1(J) \implies H \in C^1(I \times J)$
a dále $\frac{\partial H}{\partial y} = Q \neq 0$ pro každé $(x,y) \in I \times J$

To jsou předpoklady vět o implicitních funkcích

Její tvrzení je : $\exists y = y(x)$ na I tak, že

$$H(x, y(x)) = 0 \quad \text{na } I.$$

Navíc platí $y(x_0) = y_0$ protože $H(x_0, y_0) = 0$

2) jednoznačnost Nechť y_1, y_2 jsou obě řešení (*)

na jistém $I_1 \subset I$, $x_0 \in I_1$, pro něž platí $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$

Potom platí
$$P(x) + Q(y_1(x))\, y_1'(x) = 0$$
$$P(x) + Q(y_2(x))\, y_2'(x) = 0$$

odečtením dostaneme
$$Q(y_1(x))\, y_1'(x) = Q(y_2(x))\, y_2'(x)$$

zintegrujeme $\int \cdot\cdot\, dx$
$$T(y_1(x)) = T(y_2(x)) + D \quad \forall x \in I_1$$

$$T(y_0) = T(y_0) + D \quad \leftarrow \text{konkrétně i pro } x_0 \in I_1$$

$$\Rightarrow \underline{D = 0}$$

$$\boxed{T(y_1(x)) = T(y_2(x)) \quad \forall x \in I_1}$$

Protože $Q(y) \neq 0$ na J $\Rightarrow$ Q nemění znaménko na J

$\Rightarrow$ $T(y) = \int Q(y)\,dy$ je ryze monotónní $\Rightarrow$ T je prosté

$\Rightarrow$ $\boxed{y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in I_1}$ Q.E.D.

$\boxed{22.2.2021}$

Př

$$2yy' - 4x^3 = 0$$

$$2yy' = 4x^3$$

$$\int 2y\,dy = \int 4x^3\,dx$$

$$y^2 = x^4 + C \quad \Leftrightarrow \quad H(x,y) = C$$

$$y = \pm\sqrt{x^4 + C}$$

- $I = \mathbb{R}$ pro $C \geq 0$, jinak $x^4 + C \geq 0$, $x^4 \geq -C$, $|x| \geq \sqrt[4]{-C}$
- $\underline{I_1 = (-\infty, -\sqrt[4]{-C})}$ nebo $\underline{I_2 = (\sqrt[4]{-C}, +\infty)}$ pro $C < 0$

Př **DÚ**

$$yy' = e^{-y^2} \cdot \sin x$$

s podmínkou $y(3\pi) = -\sqrt{\ln 4}$

$f(x) + g(y)y' = 0$, $y = y(x)$

$\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$

po vynásobení e^{y^2} ... $ye^{y^2}y' = \sin x$ ... rovnice se separovanými pro m.

$$e^{y^2} \cdot yy' = \sin x$$

$$\frac{1}{2}\int e^{y^2} 2y\,dy = \int \sin x\,dx$$

$$\frac{1}{2}e^{y^2} = -\cos x + C$$

hned dosadíme (poč.) podmínku

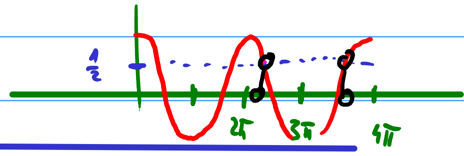
$$\frac{1}{2}e^{(-\sqrt{\ln 4})^2} = -\cos(3\pi) + C$$

$$2 = 1 + C \Rightarrow \underline{C = 1}$$

! "−" kvůli podmínce $y(3\pi) < 0$!

$$y = -\sqrt{\ln\left[2(1-\cos x)\right]}$$ musí $1-\cos x \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \geq \cos x$

$$I = \left(2\pi+\frac{\pi}{3},\ 4\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$



SEPAROVATELNÉ DR

$$\boxed{P_1(x)P_2(y) + Q_1(x)Q_2(y)y' = 0} \quad \Big| \ \frac{1}{P_2(y)Q_1(x)}$$

def. (*)

Kuchařka: "separace proměnných"

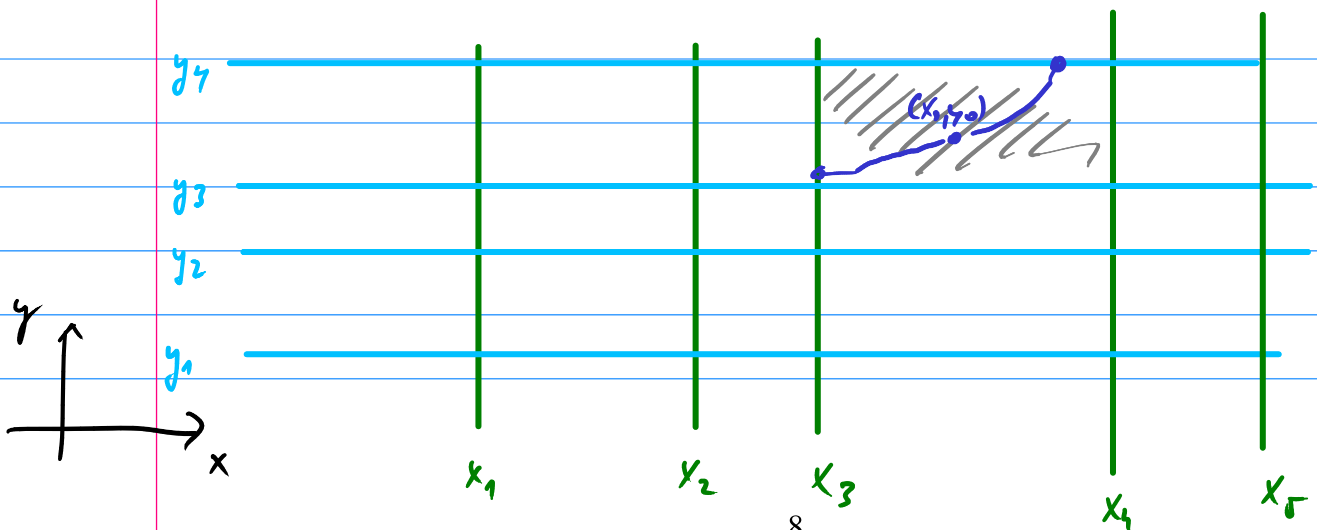
$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}y' = 0$$ .. už je separovaná DR (**)

POZN: (*) je speciální případ rovnice tvaru $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$.

Předpokládejme, že P_2 má kořeny $y_1, y_2, \dots, y_m$ a Q_1 má kořeny $x_1, x_2, \dots, x_n$

Potom na každém intervalu $(x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1})$ $\Big\}$ DÚ doplnit $i \in \dots$, $j \in \dots$

platí $P_2(y)Q_1(x) \neq 0$, a tedy rovnice (*) je ekvivalentní s ($\iff$ platí právě tehdy, když platí) (**)



• funkce y ve tvaru $y(x) = y_j$, $j \in \{1, \dots, m\}$ řeší (*) na $I = \mathbb{R}$

Př.

$$y - xy' = 0$$

$\Updownarrow$ jen pro $x, y \neq 0$

$$\frac{1}{x} - \frac{y'}{y} = 0 \qquad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \tilde{c} = \ln|cx|$$

$\tilde{c} = \ln|c|$, $c \neq 0$

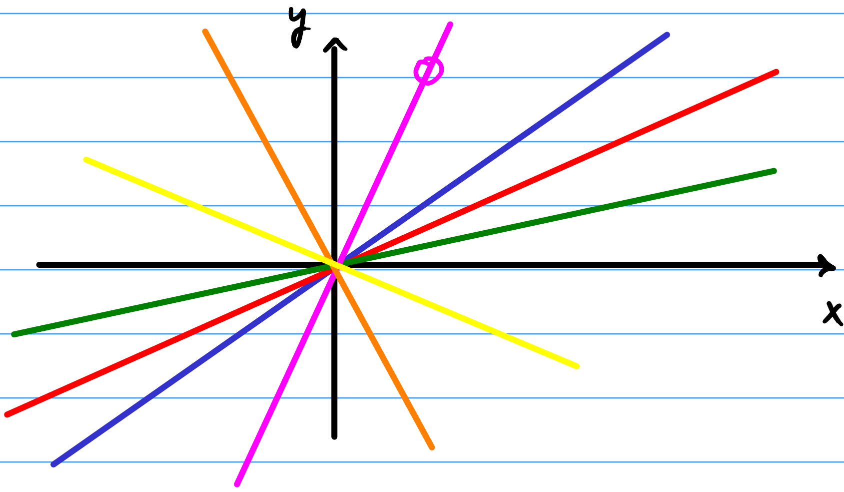
$c \neq 0$ $\Updownarrow$

$$\Rightarrow \underline{y = cx}$$

dosazením do původní rovnice zjišťujeme, že $x, y = 0$ nevadí $\Rightarrow$ $c = 0$ nevadí

$I = \mathbb{R}$

jak vypadají všechny integrální křivky této rovnice ?



Př. Nalézt obecné řešení $y' = \frac{|xy|}{xy}$ a zakreslit integrální křivky

$$|xy| - (xy)y' = 0 \quad \Big| \frac{1}{|y| \cdot x}$$

$$\frac{|x|}{x} - \frac{y}{|y|} y' = 0$$

$\vdots$

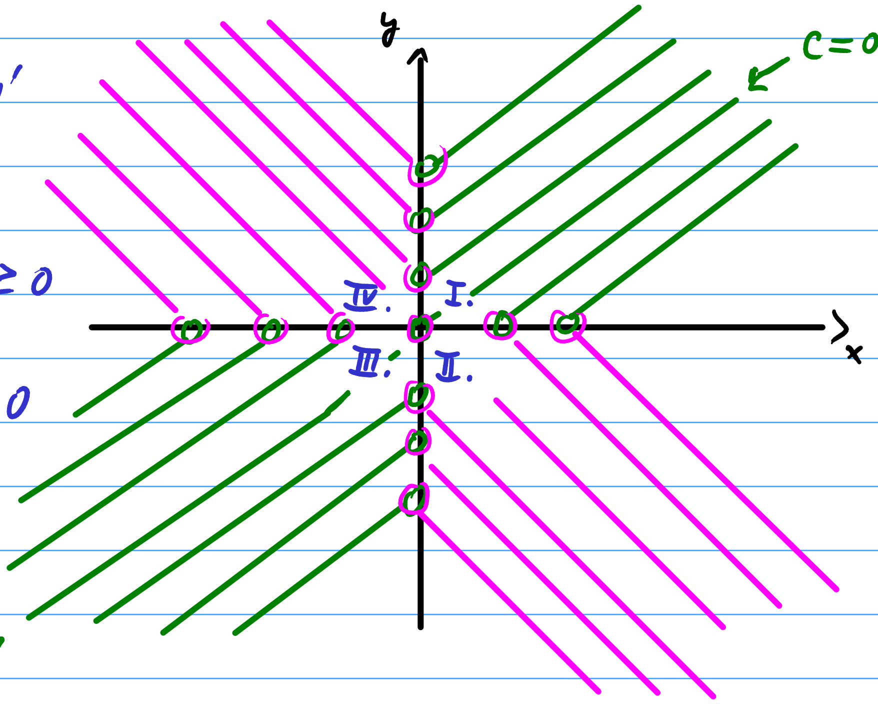
formálně jde o separovatelnou DR ...

$$y' = \frac{|xy|}{xy}$$

1) nesmí $x, y = 0$

2) pravá strana je ± 1

v I a III. q. je řešení
$y = x + C$



I.
$$I = \begin{cases} (0, +\infty) & \text{pro } C \geq 0 \\ (-C, +\infty) & \text{pro } C < 0 \end{cases}$$

III.
$$I = \begin{cases} (-\infty, 0) & \text{pro } C \leq 0 \\ (-\infty, -C) & \text{pro } C > 0 \end{cases}$$

C=0

v II. a IV. q. je
$y = -x + C$

II. $I = \dots$

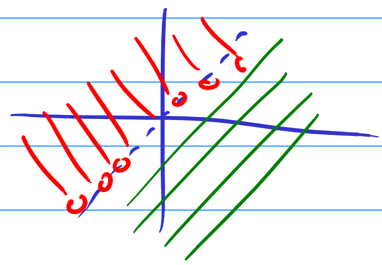
IV. $I = \dots$

} DÚ

DÚ

a) $y' = \dfrac{x-y}{|x-y|}$

b) $y' = \dfrac{x+|x|}{y+|y|}$



$y = -x + C$

$I = (-\infty, \frac{C}{2})$

Př. $xy' - ky = 0$ kde $k \in \mathbb{Z}$

$x, y \neq 0$

$$\frac{y'}{y} = \frac{k}{x}$$

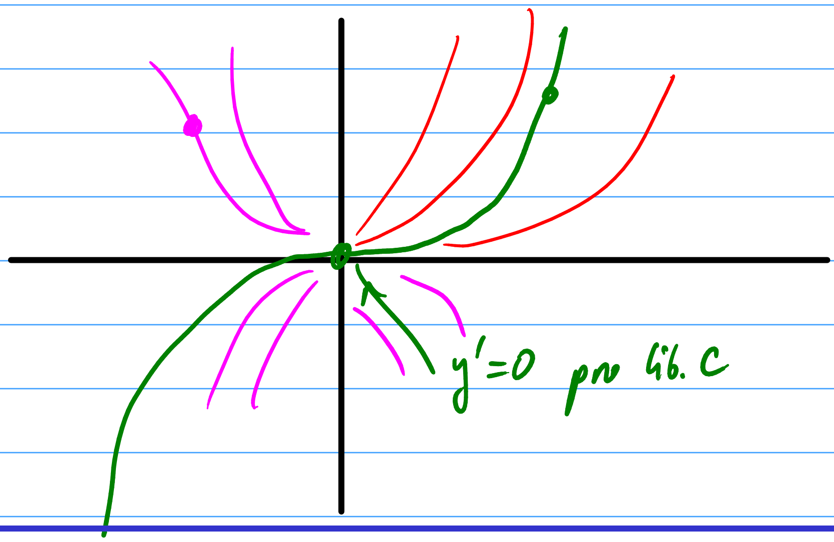
$c \neq 0$

$$\ln|y| = k \ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx^k|$$

$$\underline{\underline{y = Cx^k}}$$

vidíme (dosazením) že $C \in \mathbb{R}$

pro $k=3$ nakreslíme integrální křivky $y = Cx^3$



Př.

$$y' = \frac{\sin y}{\sin x}$$

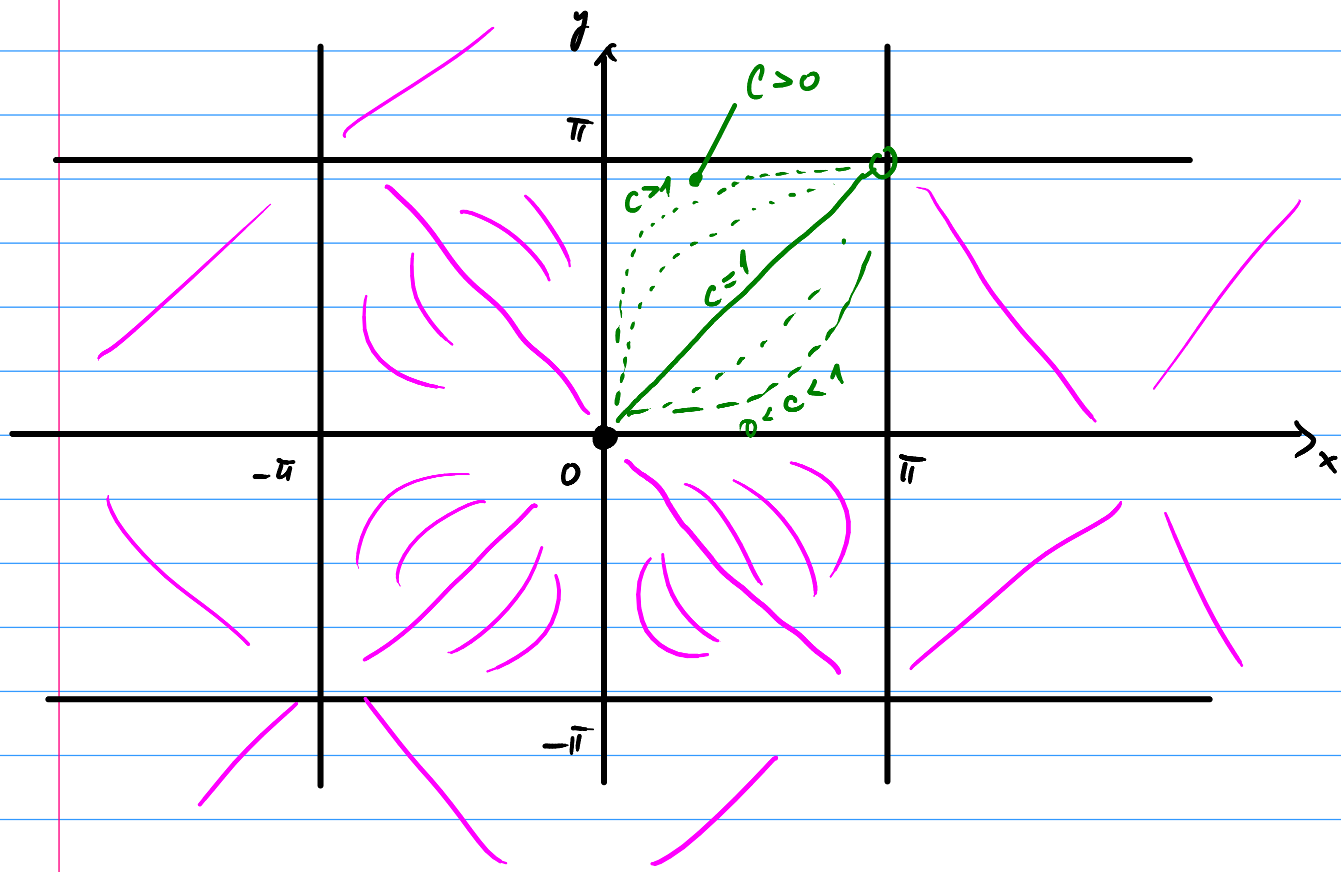
$$\frac{y'}{\sin y} = \frac{1}{\sin x} \quad \dots \quad \text{DR se sep. p.}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{\sin\left(2\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{dx}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{subst. } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ dt = \dfrac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \end{array}\right] = \int \frac{dt}{t} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \tilde{C}$$

$$\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right)\right| = \ln\left|C\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) = C\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow y = 2\operatorname{arctg}\left(C\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$



HOMOGENNÍ DR (st α)

$$\boxed{\begin{gathered} P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0 \quad \underset{Q\neq 0}{\Longleftrightarrow} \quad y' = -\frac{P}{Q}(x,y) \\ \text{kde } P, Q \text{ jsou homogenní funkce stupně } \alpha \in \mathbb{R} \end{gathered}}$$

DEF: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je homog. st α $\Longleftrightarrow$ def (*)

$$(\forall t \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\left(f(tx, ty) = t^\alpha f(x,y)\right)$$

Př

$f(x,y) = x + y$ homog. st 1

$f(x,y) = x^2 + xy$ homog. st. 2

$f(x,y) = \frac{1}{x}$ homog st -1

$f(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right)$ homog st 0

Kuchařka : 1) udělej subst. $y(x) = x\,u(x)$

POZN : každá subst. je transformace souřadnic

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{\Phi}\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \qquad \text{zde :} \quad \boxed{\begin{aligned} x &= t \\ y &= tu \end{aligned}}$$

musí být prosté a regulární

$$J_\phi = \begin{vmatrix} \partial_t \phi_1 & \partial_u \phi_1 \\ \partial_t \phi_2 & \partial_u \phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u & t \end{vmatrix} = t \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$$

Proč funguje kuchařka: $\quad y = xu \quad y' = u + xu'$

$$P(x, xu) + Q(x, xu)(u + xu') = 0$$

$$x^\alpha P(1,u) + x^\alpha Q(1,u)(u + xu') = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{x^\alpha} \neq 0$$

$$P(1,u) + Q(1,u)u + Q(1,u)xu' = 0$$

$$\boxed{\frac{Q(1,u)}{P(1,u) + Q(1,u)\cdot u} u' = -\frac{1}{x}}$$

DR se separovanými proměnnými

def (**)

VĚTA: Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $0 \notin I$. Potom je-li u řešením rovnice (**), pak funkce $y(x) = xu(x)$ je řešením (*) na I.

Naopak, je-li $y = y(x)$ řešením (*), pak $u(x) = \frac{1}{x} y(x)$ řeší (**) na I.

Dk: viz kuchařka

POZN: Lineární řešení homogenní r. $\quad y = xK \quad K = \text{konst.}$

$$y' = K$$

$$P(x, Kx) + Q(x, Kx)K = 0$$

$$\Big\downarrow \frac{1}{x^\alpha}$$

$$P(1,K) + Q(1,K)K = 0$$

algebraická rovnice pro K

Př $\qquad \underbrace{y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)}_{\text{homog. st. 1}} - \underbrace{xy'}_{\text{h. st. 1}} = 0 \qquad \begin{aligned} y &= xu \\ y' &= u + xu' \end{aligned}$

$$xu\left(1+\ln\frac{xu}{x}\right) - x(u+xu') = 0 \quad \Big|\cdot x^{-1}$$

$$u(1+\ln u) - u - xu' = 0$$

$$\boxed{\frac{u'}{u\ln u}} = \frac{u'}{u(1+\ln u)-u} = \boxed{\frac{1}{x}}$$

$\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{dt}{t}$ $\quad t = \ln u,\ dt = \frac{1}{u}du$

$$\ln|\ln u| = \ln|Cx| \qquad C \neq 0\ !$$

$$\ln u = Cx$$

$$\underline{u(x) = e^{Cx}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y(x) = xe^{Cx}}}$$

kdyby $C = 0 \Rightarrow x(1+\ln 1) - x\cdot 1 = 0$ ✓

$\underline{y = x}$

Dú $\qquad y' = \frac{x+y}{x-y}$

$\vdots$

$\int (\ldots)\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$ — půjde jen $H(x,y) = 0$

resp. $x = \exp(f(y))$

1.3. 2021

Homogenní DR: $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ $\quad P, Q$ homog. st α

Př $\quad 2xy + (x^2-y^2)y' = 0$ $\quad P, Q$ homog st. 2

a) lineární řeš: $y = kx \quad y' = k$

$$2kx^2 + x^2(1-k^2)k = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$\Uparrow \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$2k + (1-k^2)k = 0$$

$$k(3-k^2) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, \ k_{2,3} = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y_1 = 0, \ y_2 = \sqrt{3}x, \ y_3 = -\sqrt{3}x$$

b) obecné řešení $\quad y(x) = xu(x) \quad y' = u + xu' \quad (x \neq 0)$

$$2x^2u + x^2(1-u^2)(u+xu') = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$2u + (1-u^2)u + (1-u^2)xu' = 0$$

$$\frac{1-u^2}{3u-u^3} = -\frac{1}{x}$$

$t = 3u - u^3$

$dt = (3-3u^2)du$

$$\frac{1}{3}\ln|3u-u^3| = -\ln|xC| \quad C \neq 0$$

$$3u - u^3 = \frac{1}{C^3x^3} = \frac{D}{x^3} \quad D = C^{-3} \neq 0$$

$$u = \frac{y}{x} \qquad 3\frac{y}{x} - \frac{y^3}{x^3} = \frac{D}{x^3} \quad \Big| \ x^3$$

co kdyby $D = 0$ $\leftarrow$ $\quad 3x^2y - y^3 = D \quad \cdot \frac{1}{y} \quad (y \neq 0)$

$y(3x^2 - y^2) = 0$

$y = 0$

$y^2 = 3x^2$

$y = \pm\sqrt{3}x$

$$3x^2 = \frac{D}{y} + y^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{D}{y} + y^2\right)}$$

$$I_y^{(1)} = (0, +\infty)$$
$$I_y^{(2)} = (-\infty, -\sqrt[3]{D})$$
} pro $D > 0$

$$I_y^{(1)} = (-\infty, 0)$$
$$I_y^{(2)} = (-\sqrt[3]{D}, +\infty)$$
} pro $D < 0$

$\frac{D}{y} + y^2 \geq 0 \quad | \cdot y > 0$

$D + y^3 \geq 0$

$y^3 \geq -D$

$| \cdot y < 0$

$D + y^3 \leq 0$

$y^3 \leq -D$

KVAZIHOMOGENNÍ DR

Pozn: Homogenní DR: $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$

$\Leftrightarrow \quad y' = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ kde $\frac{P}{Q} = f$ je homog. st. 0

tj. $f(tx, ty) = f(x,y)$

KvaziHomog:

$$\boxed{y' = f(x,y) \quad \text{kde} \quad f(t^\alpha x, t^\beta y) = t^{\beta-\alpha} f(x,y) \quad \text{pro jisté } \alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}}$$

homog: $\alpha = \beta = 1$

Kuchařka: subst. $y = x^{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot u \qquad \alpha \neq 0, \beta \neq 0$

$$y' = \frac{\beta}{\alpha} x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} u + x^{\frac{\beta}{\alpha}} u'$$

pak:

$$y' = \frac{\beta}{\alpha} x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} u + x^{\frac{\beta}{\alpha}} u' = f\left(x, x^{\frac{\beta}{\alpha}} u\right) = f\left(\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha, \left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\beta u\right) =$$

$$= \left(x^{1/\alpha}\right)^{\beta-\alpha} f(1,u) = x^{\frac{\beta}{\alpha}-1} f(1,u) \quad \Big| \cdot \frac{1}{x^{\frac{\beta}{\alpha}-1}}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}u + xu' = f(1,u)$$

$$\frac{u'}{f(1,u) - \frac{\beta}{\alpha}u} = +\frac{1}{x}$$ rovnice se sep. proměnnými

---

Př $$\frac{2}{x^2} - y^2 - y' = 0 \iff y' = \frac{2}{x^2} - y^2 = f(x,y)$$

$$f\left(\tfrac{1}{t}x, ty\right) = t^{2} f(x,y)$$ (2 — $\beta-\alpha$)

t^{-1} t^{1}

$\alpha = -1$ $\beta = +1$ $\Rightarrow$ vhodná subst. je $y = x^{-1}u = \frac{u}{x}$

! Jak v praxi hledat α, β? Nebudeme je hledat, ale budeme hledat jen jejich podíl ($k = \frac{\beta}{\alpha}$)

subst. $y = x^k u \Rightarrow y' = kx^{k-1}u + x^k u'$

$$kx^{k-1}u + x^k u' = \frac{2}{x^2} - x^{2k}u^2 \quad \Big| \cdot \frac{1}{x^{k-1}}$$

$(k-1) = -2 = 2k \iff k = -1$

$$-u + xu' = 2 - u^2$$
$$xu' = 2 + u - u^2$$

$$\frac{u'}{2+u-u^2} = \frac{1}{x}$$ separovaná DR $\Rightarrow$ řešíme standardně

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

Př

$$\underbrace{9yy' - 18xy + 4x^3 = 0}$$

$$y' = 2x - \frac{4}{9}\frac{x^3}{y} = f(x,y)$$

$$y = x^k u$$

$$y' = kx^{k-1}u + x^k u'$$

$$9x^k u\,(kx^{k-1}u + x^k u') - 18x^{k+1}u + 4x^3 = 0$$

$$2k-1 \quad = \quad k+1 \quad = \quad 3 \quad \Leftrightarrow \quad k = 2$$

$$\Rightarrow y = x^2 u$$

$$9u(2u + xu') - 18u + 4 = 0$$

$$9uxu' = 18u - 18u^2 - 4$$

$$\frac{9u}{18u - 18u^2 - 4}u' = \frac{1}{x} \quad \text{atd.} \quad (\text{separované DR})$$

POZN

$$9yy' - 18xy + 4x^3 = 0 \qquad \text{subst. } y = u^2$$

$$y' = 2uu'$$

$$\downarrow$$

$$9u^2 \cdot 2uu' - 18xu^2 + 4x^3 = 0 \quad \Big|\cdot \frac{1}{2}$$

$$\underbrace{9u^3}_{Q(x,u)}u' - \underbrace{9xu^2 + 2x^3}_{P(x,u)} = 0$$

P, Q jsou homog. st. 3

subst. $u = x \cdot w$ atd.

$$\Leftrightarrow y = x^2w^2$$

Př

$$y' = \frac{y}{x+y^3} \qquad y = x^k u, \quad y' = kx^{k-1}u + x^k u'$$

$$kx^{k-1}u + x^k u' = \frac{x^k u}{x + x^{3k}u^3} = \frac{u}{1+u^3}$$

$k-1 \qquad k-1 \qquad 1 = 3k \qquad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3}$

$$\left(kx^{k-1}u + x^k u'\right)\left(x + x^{3k}u^3\right) = x^k u$$

$k = 4k-1 = k \qquad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3}$

$$y = \sqrt[3]{x}\, u$$

$$\frac{1}{3}u + xu' = \frac{u}{1+u^3}$$ ... atd. (separovatelná)

POZN

$$y' = \frac{y}{x+y^3}$$

$$y'x + y'y^3 = y \quad \Big| \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{xy'}{y^2} + yy' - \frac{1}{y} = 0$$

$\left(-\frac{x}{y}\right)' \qquad \left(\frac{1}{2}y^2\right)'$

$$\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{y - xy'}{y^2}$$

$$\left(-\frac{x}{y} + \frac{1}{2}y^2\right)' = 0$$

$$\boxed{-\frac{x}{y} + \frac{1}{2}y^2 = C} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x = x(y) \ldots \\ y = y(x) \ldots \end{array}$$

ROVNICE TVARU $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

1) $a = b = \alpha = \beta = 0$ $(\gamma \neq 0)$

$$y' = f\left(\frac{c}{\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow y = f\left(\frac{c}{\gamma}\right)x + D$$

---

2) $b = \beta = 0$

$$y' = f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right)$$

$$y = \int f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right)dx + D$$

---

3) $c = \gamma = 0$

$$y = f\left(\frac{ax+by}{\alpha x+\beta y}\right)$$ ... homogenní DR st. 0

---

4) $b^2+\beta^2 > 0$ (b nebo β je různé od 0) $\wedge$ $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ BÚNO nechť $b \neq 0$

$a\beta - \alpha b = 0$

$\alpha = a\frac{\beta}{b}$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y = \frac{\beta}{b}(ax+by)$$

$\Rightarrow$ subst $z(x) = ax + by(x)$ $\Rightarrow$ $z' = a + by'$

$$y' = \frac{1}{b}(z'-a)$$

$$y' = \frac{1}{b}(z'-a) = f\left(\frac{z+c}{\frac{\beta}{b}z+\gamma}\right)$$ rovnice separovatelná

DŘ: naopak b lib., $\beta \neq 0$

5) $b^2+\beta^2>0 \;\wedge\; \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$

potom prejde nalezt ξ, η tak, že

$$\begin{cases} ax+by+c = a\xi+b\eta \\ \alpha x+\beta y+\gamma = \alpha\xi+\beta\eta \\ ax+by+c = a(x+x_0)+b(y+y_0) \iff \\ \alpha x+\beta y+\gamma = \alpha(x+x_0)+\beta(y+y_0) \iff \end{cases}$$

$$\xi = x+x_0 \qquad \eta = y+y_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} c &= ax_0+by_0 \\ \gamma &= \alpha x_0+\beta y_0 \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \vec{\phi}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+x_0\\ y+y_0\end{pmatrix} \qquad J_\phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\checkmark$$

otázka: co je y'? $\qquad y=y(x)$, $\eta = \eta(\xi)$

$$y(x) = y(\eta(\xi(x))) \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$y' = \underbrace{\frac{dy}{d\eta}}_{=1} \cdot \frac{d\eta}{d\xi} \cdot \underbrace{\frac{d\xi}{dx}}_{=1} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

Př $\qquad y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)$

$$\xi = x+x_0 \qquad \eta = y+y_0 \Rightarrow \xi = x-3 \qquad \eta = y+2$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= 2 \\ x_0+y_0 &= -1 \Rightarrow x_0 = -3 \end{aligned}}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2\left(\frac{\eta}{\xi+\eta}\right) \qquad \text{homog. rovnica}$$

$y = xu \qquad y' = u + xu'$

subst. $\eta = \xi \cdot z(\xi) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = z + \xi \cdot \frac{dz}{d\xi}$

$$z + \xi \frac{dz}{d\xi} = 2\left(\frac{\xi z}{\xi + \xi z}\right) = \frac{2z}{1+z}$$

$$\xi \frac{dz}{d\xi} = \frac{z - z^2}{1+z}$$

pokud $z \neq 0$ (neekviv. úprava)

$$\frac{1+z}{z-z^2}\frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{\xi} \qquad \text{separované DR}$$

rozklad na parc. zlomky:

$$\frac{1+z}{z-z^2} = \frac{1+z}{z(1-z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{1-z} = \frac{A(1-z) + Bz}{z(1-z)} \Rightarrow \begin{matrix} A = 1 \\ B = 2 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{2}{1-z}$$

$$\ln|z| - 2\ln|1-z| = \ln|C\xi|$$

$$\frac{z}{(1-z)^2} = C\xi \qquad C \neq 0$$

je nutno prověřit, zda $z = 0$ neřeší původní rovnici!

návrat $z \to \eta$

$$\frac{\eta/\xi}{(1-\eta/\xi)^2} = C\xi$$

$$\frac{\eta}{(\xi-\eta)^2} = C$$

kdyby $C = 0$, pak

návrat $\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$$\eta = C(\xi - \eta)^2$$

$\eta = y + 2 = 0$ a vlastně i $z = 0$

$\Rightarrow y = -2$

a to je (lin.) řešení

$$y + 2 = C\cdot(x - 3 - (y+2))^2$$

$$\underline{\underline{y + 2 = C(x - y - 5)^2}}$$

navíc kvadrát

POZN: Alternativní zadání $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^{2}$

⋮ postup stejný jako minule, dostaneme
⋮

$$z + \xi \frac{dz}{d\xi} = \frac{2z^2}{(1+z)^2}$$

$$\xi \frac{dz}{d\xi} = \frac{2z^2 - z(1+z)^2}{(1+z)^2} = \frac{2z^2 - z - 2z^2 - z^3}{(1+z)^2} =$$

$$= -\frac{z(1+z^2)}{(1+z)^2}$$

pokud $z \neq 0$ ... opět: $z = 0$ řeší původní rovnici, tj. $\Leftrightarrow \eta = 0 \Leftrightarrow y = 2$

$$\frac{(1+z)^2}{z(1+z^2)} \frac{dz}{d\xi} = -\frac{1}{\xi}$$

rozklad na parc. zlomky (uhodneme) $2z + (1+z^2) = (1+z)^2$

$$\left(\frac{1}{z} + \frac{2}{1+z^2}\right)\frac{dz}{d\xi} = -\frac{1}{\xi}$$

$C \neq 0$

$$\ln|z| + 2\operatorname{arctg} z = -\ln|\xi| + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{\xi}\right|$$

$$z \cdot \exp(2\operatorname{arctg} z) = \frac{C}{\xi}$$

návrat k původním proměnným $z \to \eta$

$$\frac{\eta}{\xi}\exp\left(2\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}\right) = \frac{C}{\xi} \quad \Big| \cdot \xi$$

$\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$

$$\boxed{(y+2)\exp\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{y+2}{x-3}\right)\right) = C}$$

implicitní zápis, s kterým nehneme

$I_1 = (-\infty, 3)$ nebo $I_2 = (3, +\infty)$

(Př) Dú $y' = \frac{x+2y+1}{2x+3}$ s podmínkou $y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$

---

8. 3. 2021

1) rovnice typu $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ - dokončení

Dú z minula: $y' = \frac{x+2y+1}{2x+3}$ s podmínkou $y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$

zde $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

$\xi = x + x_0 \qquad a x_0 + b y_0 = c \qquad$ konkrétně $\quad x_0 + 2y_0 = 1$

$\eta = y + y_0 \qquad \alpha x_0 + \beta y_0 = \gamma \qquad\qquad 2x_0 = 3$

$\Rightarrow x_0 = \frac{3}{2},\ y_0 = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \xi = x + \frac{3}{2}$

$\eta = y - \frac{1}{4}$ a po dosazení do rovnice

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + 2\eta}{2\xi}$$

subst. $\eta = \xi z(\xi)$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = z + \xi\frac{dz}{d\xi} = \frac{\xi + 2\xi z}{2\xi} = \frac{1+2z}{2} = \frac{1}{2} + z$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{2\xi} \quad \Big| \int$$

$$z = \frac{1}{2}\ln|\xi| + \tilde{C} = \frac{1}{2}\ln|C\xi|$$

$\tilde{C} \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

z podm. $y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$x = \frac{5}{2} \ \dots\ \xi = 4$

$y = \frac{1}{4} \ \dots\ \eta = 0 \ \dots\ z = 0$

dosadíme $\quad 0 = \frac{1}{2}\ln|C\cdot 4|$

$\frac{1}{4} = |C|$

$\xi \neq 0 \wedge \xi = 4 \in I_\xi \Rightarrow I_\xi = (0, +\infty)$

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi}{4}\right)$$

zpet k prvotni prom. $\frac{\eta}{\xi} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\xi}{4}\right)$

$$\eta = \frac{1}{2}\xi \ln\left(\frac{\xi}{4}\right)$$

$\xi = x + \frac{3}{2}$

$\eta = y - \frac{1}{4}$

$$\underline{y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{2}\right)\ln\left(\frac{1}{4}\left(x+\frac{3}{2}\right)\right)}$$

$$I_x = \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

Pr $\quad x+y+1 + (2x+2y-1)y' = 0 \qquad y' = -\frac{x+y+1}{2x+2y-1}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Subst. $z = x+y$, $z = z(x) \Rightarrow z' = 1 + y' \Leftrightarrow y' = z' - 1$

$z + 1 + (2z-1)(z'-1) = 0$ rovnice se sep. prom.

$\Rightarrow$ za DÚ dopočítat

$\vdots$

Pr **Bonus** : $\quad y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\left(\frac{y-2x}{x+1}\right)$

nápověda : $\xi = x+1 \qquad \eta = y+2$

$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} + \operatorname{tg}\left(\frac{\eta - 2\xi}{\xi}\right)$ homog. rovnice N. D

subst. $\eta = \xi z$, $\frac{d\eta}{d\xi} = z + \xi\frac{dz}{d\xi}$

$$\cancel{z} + \xi\frac{dz}{d\xi} = \cancel{z} + \operatorname{tg}(z-2)$$

$$\cot g(z-2)\,\frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{\xi} \qquad \text{separ. DR}$$

$$\int \cot g(z-2)\,dz = \int \frac{\cos(z-2)}{\sin(z-2)}\,dz = \ln|\sin(z-2)|$$

$$\ln|\sin(z-2)| = \ln|C\xi| \qquad C \neq 0$$

(nechť $C>0$)

$$\sin(z-2) = C\xi \quad \Rightarrow \quad C\xi \in \langle -1, 1\rangle \wedge \xi \neq 0$$

$\xi \in \langle -\frac{1}{C}, 0)$ nebo $\xi \in (0, \frac{1}{C}\rangle$

$\Rightarrow x \in \langle -\frac{1}{C} - 1, -1)$ nebo $x \in (-1, -1 + \frac{1}{C}\rangle$

$$z-2 = \arcsin(C\xi) + 2k\pi$$

$$\frac{y+2}{x+1} = \arcsin(C(x+1)) + 2(k\pi+1)$$

$$y = \big(\arcsin(C(x+1)) + 2(k\pi+1)\big)(x+1) - 2 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = (-\frac{1}{C} - 1, -1) \\ I_2 = (-1, -1 + \frac{1}{C}) \end{cases}$$

pro $C<0$ analogicky

$C=0$ taky funguje (pův. rovnice)

Jako **domácí úkol**

$$2x - 4y + 6 + (x + y - 3)\,y' = 0,$$

Řešení: Prvním krokem je substituce

$$t = x - 1,$$
$$z = y - 2$$

a konečné řešení je ve tvaru

$$(y - 2x)^3 = C\,(y - x - 1)^2,$$

resp.

$$D\,(y - 2x)^3 = (y - x - 1)^2,$$

kde $C, D \neq 0$, podle toho, na kterou stranu v postupu přidáme integrační konstantu. Pro $C = 0$, resp. $D = 0$ však vycházejí lineární řešení příslušné homogenní D.R. (v proměnných t, z) $y = 2x$, resp. $y = x + 1$, které získáme substitucí $z = Kt$.

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Nechť $p, q \in C(I)$ kde I je interval. Potom rovnici tvaru

(a,b)

$\mathbb{R}$

$$y' + p(x)y = q(x)$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu s pravou stranou a rovnici

$$y' + p(x)y = 0$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu bez pravé strany.

Kuchařka : 1) řešíme rovnici bez pravé strany :

$$y' + p(x)y = 0$$

$$y' = -p(x)y$$

$$\frac{y'}{y} = -p(x) \quad \text{rovnice se sep. prom.}$$

$$\ln|y| = -\underbrace{\int p(x)dx}_{P(x)} + \tilde{C} \quad \in \mathbb{R}$$

$$\dots \quad P'(x) = p(x)$$

$$|y| = \exp(-P(x)) \cdot \exp(\tilde{C}) = |C| > 0$$

$$\underline{y = C\exp(-P(x))} \quad \text{kde } C \in \mathbb{R}$$

2) řešíme rovnici s pravou stranou metodou "variace konstanty" $C \to C(x)$

tj. předpokládáme řešení ve tvaru $\underline{y = C(x)e^{-P(x)}}$

a dosadíme do rovnice $y' + p(x)y = q(x)$

$$\downarrow$$

$$C'(x)e^{-P(x)} + C(x)\cancel{\left(-p(x)e^{-P(x)}\right)} + \underbrace{\cancel{p(x)\,C(x)e^{-P(x)}}}_{p\cdot y} = q(x)$$

$$C'(x) = q(x)e^{P(x)}$$
$$C(x) = \int q(x)e^{P(x)}\,dx + C_0$$

$$\Rightarrow\ y(x) = \underbrace{C_0 e^{-P(x)}}_{\in [y_1]_\lambda} + \underbrace{e^{-P(x)}\int q(x)e^{P(x)}\,dx}_{y_p} \qquad \text{kde } y_1(x) = e^{-P(x)}$$

POZN : Lin. d. rovnice řádu n

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k\, y^{(k)} = q \qquad \text{kde } p_k, q \in C(I)$$

$$y \in [y_1, \dots, y_n]_\lambda + y_p$$

VĚTA : *Nechť $p, q \in C(I)$, $I = \cancel{(a, b)}$. Potom pro každý bod $[x_0, y_0] \in I \times \mathbb{R}$ existuje právě jedno řešení úlohy*

$$y' + p(x)\,y = q(x), \quad (*)$$
$$y(x_0) = y_0$$

na intervalu I.

Dk: 1) existence

$$y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt + y_0 e^{P(x_0)}\right] e^{-P(x)}$$

1) y je jedno z obecných řešení $(*)$

2) $y(x_0) = (0 + y_0)\cdot 1 = y_0$ ✓

$$\text{kde} \quad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,dt$$

$P(x_0) = 0$

nebo $P(x)$ je lib.

primitivní fce k $p(x)$ a pak to opravíme takto

2) jednoznačnost : mějme y_1, y_2 splňující na I

$$\begin{aligned} y_1' + p(x) y_1 &= q(x) \qquad y_1(x_0) = y_0 \\ \wedge \quad y_2' + p(x) y_2 &= q(x) \qquad y_2(x_0) = y_0 \end{aligned}$$

$$(\underbrace{y_1 - y_2}_{z = y_1 - y_2})' + p(x)(y_1 - y_2) = 0 \quad \wedge \quad (y_1 - y_2)(x_0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$z' + p(x) z = 0 \quad \wedge \quad z(x_0) = 0$$

vynásobíme $e^{P(x)}$ kde $P' = p$

$$\underbrace{z' e^{P(x)} + p(x) e^{P(x)} z}_{} = 0$$

$$\left(z e^{P(x)}\right)' = 0$$

$$z e^{P(x)} = c$$

ale z podm. $z(x_0) = 0$ platí $c = 0$

$$z e^{P(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0$$

$\Leftrightarrow \; z(x) = 0 \;\; \forall x \in I \;\; \Leftrightarrow \;\; y_1(x) = y_2(x) \;\; \forall x \in I$. ∎

POZN: Metoda integračního faktoru : rovnici $y' + p(x) y = q(x)$

vynásobíme $\underbrace{e^{P(x)}}_{\text{integrační faktor (1. druhu)}}$

vznikne
$$\begin{aligned} \left(y e^{P(x)}\right)' &= q(x) e^{P(x)} \\ y e^{P(x)} &= \int q(x) e^{P(x)} \, dx + C_0 \\ y &= e^{-P(x)} \left(\int q(x) e^{P(x)} \, dx + C_0 \right) \end{aligned}$$

(Př)

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}$$
$$y(1) = 0$$

1) "klasicky":

$p(x) = 2x$
$q(x) = xe^{-x^2}$

$$y' + 2xy = 0$$
$$\frac{y'}{y} = -2x$$
$$\ln|y| = -x^2 + \tilde{C}$$
$$\underline{y = Ce^{-x^2}}$$

variace konst.

$$y = C(x)e^{-x^2}$$

$$\underbrace{C'e^{-x^2} + C(-2x)\cancel{e^{-x^2}}}_{y'} \underbrace{+ \cancel{2xCe^{-x^2}}}_{+2xy} = xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \underline{C' = x} \Rightarrow C = \tfrac{1}{2}x^2 + C_0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y = \left(\tfrac{1}{2}x^2 + C_0\right)e^{-x^2}}$$

2) pomocí IF

$$y' + 2xy = xe^{-x^2} \,\Big|\cdot e^{x^2}$$

$p(x) = 2x$
$P(x) = x^2$
$IF = e^{P(x)} = e^{x^2}$

$$\left(y \cdot e^{x^2}\right)' = x$$
$$ye^{x^2} = \tfrac{1}{2}x^2 + C_0$$
$$\underline{y = \left(\tfrac{1}{2}x^2 + C_0\right)e^{-x^2}}$$

společné je dosazení poč. podm. a výpočet C_0:

$$0 = \left(\tfrac{1}{2} + C_0\right)e^{-1} \Rightarrow C_0 = -\tfrac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{y = \tfrac{1}{2}(x^2 - 1)e^{-x^2}}} \quad I = \mathbb{R}$$

15. 3. 2021

DÚ z minula

$$y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

neú $y' + p(x)y = q(x)$

$$y' - y \cdot \operatorname{cotg} x = -\frac{\sin x}{x^2}$$

$x \in (0, \pi) + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftarrow \sin x \neq 0$

metodou IF :

(doma ... 1) $y' + py = 0$
2) variace konst)

$p(x) = -\operatorname{cotg} x$

$$P(x) = -\int \operatorname{cotg} x \, dx = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right] = -\int \frac{1}{t} dt = -\ln|\sin x|$$

$$e^{P(x)} = e^{-\ln|\sin x|} = \frac{1}{|\sin x|} \qquad IF = \frac{1}{\sin x}$$

$$\left(\frac{y}{\sin x} \right)' = -\frac{1}{x^2} \quad \Big| \int$$

$$\frac{y}{\sin x} = \frac{1}{x} + C$$

$$y = \underbrace{C \sin x}_{y_0(x)} + \underbrace{\frac{1}{x} \sin x}_{y_p(x)}$$

Diskuze nad I : $x \neq 0 \qquad x = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$

mech. dosazení a nebo diskuze nad spoj. $\Rightarrow I_1 = (-\infty, 0)$
$I_2 = (0, +\infty)$

Př $y'(3x+y^2) = -y$ ... použiže $x = x(y)$

závislé prom.

nezávislé prom.

pak $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\dot{x}}$

$$\frac{1}{\dot{x}}(3x+y^2) = -y$$

$$3x+y^2 = -y\dot{x} \quad \Big| \cdot \frac{1}{y}$$

$$\dot{x} + \frac{3}{y}x = -y$$

... rovnice tvaru $\dot{x} + p(y)x = q(y)$

tj. LDR 1. řádu pro neznámou funkci $x = x(y)$

Př $xy' + 2y = 4x^2$, tj: $y' + \frac{2}{x}y = 4x$ pro $x \neq 0$

s poč. podmínkou a) $y(2) = 5$

b) $y(0) = 0$

c) $y(0) = 8$

!

IF: $p(x) = \frac{2}{x}$ $\quad P(x) = 2\ln|x|$ $\quad e^{P(x)} = x^2 = IF$

$$\Rightarrow \quad y' + \frac{2}{x}y = 4x \quad \Big| \cdot x^2$$

$$(x^2y)' = 4x^3$$

$$x^2y = x^4 + C$$

← necháme takto a hodnotu konst. C dopočítáme z poč. podm. už zde

$x \neq 0$

$$y = x^2 + \frac{C}{x^2}$$

a) $y(2) = 5$ ... $2^2 \cdot 5 = 2^4 + C \iff C = 4$

a řešení je $x^2y = x^4 + 4 \Rightarrow y = x^2 + \frac{4}{x^2}$ ✓ kvůli poč. podm. !

a $I = (0, +\infty)$

b) $y(0)=0 \quad \dots \quad 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 y = x^4 \Rightarrow y = x^2 \qquad I = \mathbb{R}$$

$\Leftarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $y(0)=8 \quad \dots \quad 0^2 \cdot 8 = 0^4 + C \Rightarrow C = 0$ ale $y = x^2$ neprochází bodem $(0,8)$

$\Rightarrow$ řešení neexistuje

Př.

$$y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y}$$

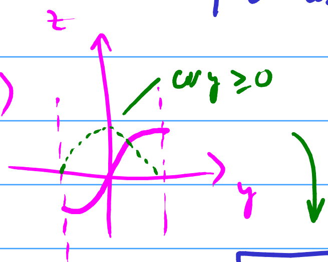
nápověda: $z = \sin y$ $\qquad \Phi(x,y) = \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \sin y \end{pmatrix}$

$$J_\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos y \end{vmatrix} = \cos y \neq 0 \text{ jen pro } \underline{y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

na int. $z \in \langle -1, 1 \rangle$

$y = \arcsin z \Rightarrow y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot z'$



$$\operatorname{tg} y = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \qquad \cos y = \sqrt{1-z^2}$$

dosadíme:
$$\frac{1}{\sqrt{\ }} z' + \frac{z}{\sqrt{\ }} = \frac{x}{\sqrt{\ }} \quad \Big| \cdot \sqrt{\ }$$

$$z' + z = x \quad | \cdot e^x$$
$$(ze^x)' = x e^x$$
$$ze^x = (x-1)e^x + C$$
$$\underline{z = x - 1 + Ce^{-x}}$$

DÚ: domyslet 1) def. obor řešení $z = z(x)$ .. $\quad z(x) \in \langle -1, 1 \rangle$!

2) .. $y = \arcsin\left(x - 1 + Ce^{-x}\right)$

BERNOULLIHO DR

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$$ kde $p, q \in C(I)$ (*)
a $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$\alpha = 0$ … LDR 1. řádu
$\alpha = 1$ … $y' + (p-q)y = 0$
… LDR 1. řádu bez p.s.

Pozorování: pro $\alpha > 0$ je $y = 0$ řešení na I.

Kuchařka: Nechť $y \neq 0$ $\Rightarrow$ 1) vynásobíme rovnici $(1-\alpha)y^{-\alpha}$

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + p(x)(1-\alpha)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)q(x)$$

$\downarrow$ 2) subst. $z = y^{1-\alpha}$
$\Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y'$

$$z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x) \quad (**)$$
$$z' + \tilde{p}(x)z = \tilde{q}(x)$$

Pozn.: $\begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y^{1-\alpha} \end{pmatrix}$ $\quad J_{\Phi} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)y^{-\alpha} \end{vmatrix} \neq 0$

pokud $y \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$ už předpokládáme

Věta shrnující výše uvedený postup

$\downarrow$

Nechť $\alpha \notin \{0,1\}$, p,q jsou spojité na $I=(a,b)$, Nechť neplatí $q \equiv 0$ na I. Potom

1. *Jestliže z je řešením rovnice*

$$z' + (1-\alpha)\,p(x)\,z = (1-\alpha)\,q(x) \qquad (**)$$

na (a,b), pak funkce y splňující $\forall x \in I$ vztahy $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ a $y(x) \neq 0$ (a y' existuje - podle mě existuje) je řešením rovnice

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha}.\ (*)$$

2. *Naopak pokud y řeší*

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha} \quad (*)$$

na I a $(\forall x \in I)\,(y(x) \neq 0)$, tak potom existuje řešení z rovnice

$$z' + (1-\alpha)\,p(x)\,z = (1-\alpha)\,q(x)\ (**)$$

na I takové, že platí $z = y^{1-\alpha}$.

Př .. DÚ (viz wikiskripta) $\quad xy' - y = x^2 y^{-1} \qquad (\alpha = -1)$

vyjde $\quad y = |x|\sqrt{2\ln|x| + C}$

Př $\quad xy' - 4y = x^2\sqrt{y} \;\Big|\; \ldots \quad \alpha = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{x}(1-\alpha)y^{-\alpha} = \frac{1}{x}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,y' - \frac{2}{x}\sqrt{y} = \frac{1}{2}x \qquad \text{subst}\quad z = y^{1-\alpha} = \sqrt{y}$$

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{1}{2}x \qquad p(x) = -\frac{2}{x} \quad P(x) = -2\ln|x|$$

$$e^{P(x)} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \left(z\cdot\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$z \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}C$$

$$z = \frac{1}{2}x^2(\ln|x| + C)$$

$$\Rightarrow \underline{y = z^2 = \frac{1}{4}x^4(\ln|x| + C)^2}$$

z podmínky $z = \sqrt{y} \geq 0$ musí $(\ln|x| + C) \geq 0$

$$\ln|x| \geq -C$$

$$|x| \geq e^{-C}$$

$$\Rightarrow I_1 = (-\infty, -e^{-C}) \quad \vee \quad I_2 = (e^{-C}, +\infty)$$

Př $\quad y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y} \qquad \alpha = \frac{1}{2}$

$$\Big| \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \text{a pak subst. } z = \sqrt{y}$$

$$z' + 2xz = xe^{-x^2}$$

rovnice (LDR) řešena jako první ukázkový příklad na LDR v minulém cv.

$$z = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)e^{-x^2}$$

$$\underline{y = z^2 = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)^2 e^{-2x^2}} \quad \text{a musí platit } z \geq 0$$

tj. $\quad \frac{1}{2}x^2 + C \geq 0 \quad \rightarrow \quad C \geq 0 \; \text{---} \; \underline{x \in \mathbb{R} = I}$

pro $C < 0$

$$x^2 \geq -2C$$

$$|x| \geq \sqrt{-2C}$$

$$\Rightarrow \underline{I_1 = (-\infty, -\sqrt{-2C}) \quad \vee \quad I_2 = (\sqrt{-2C}, +\infty)}$$

DÚ — $y' + 4xy = 4x\sqrt{y}$ ... vyjde $y = \left(Ce^{-x^2}+1\right)^2$

diskutujte $I = ?$ v závislosti na C

㊀ $2xyy' + 1 + y^2 = 0$ ← (2021: vyřešeno už ze)

Př

$$2y(x-1)y' + y^2 = 4x(3x-2) \quad \Big| \ 1/2y(x-1) \quad y \neq 0 \wedge x \neq 1$$
$$y(1) = 2$$

$$y' + \frac{1}{2(x-1)}y = \frac{2x(3x-2)}{x-1} \cdot y^{-1} \quad \Big| \ \alpha = -1, \ \cdot (1-\alpha)y^{-\alpha} = 2y$$

$$2yy' + \frac{1}{x-1}y^2 = \frac{4x(3x-2)}{x-1} \qquad \text{subst. } z = y^{1-\alpha} = y^2$$

$$z' + \frac{1}{x-1}z = \frac{4x(3x-2)}{x-1} \quad \Big| (x-1) \qquad p(x) = \frac{1}{x-1} \quad P(x) = \ln|x-1|$$
$$e^{P(x)} = |x-1|$$
$$\text{a } IF = \underline{(x-1)}$$

$$((x-1)z)' = 4x(3x-2)$$
$$(x-1)z = 4x^3 - 4x^2 + C$$
$$= 4x^2(x-1) + C \qquad \text{hned zde dosadíme poč. podm.}$$
$$y(1) = 2 \qquad z(1) = 2^2 = 4$$

$$0 \cdot 4 = 4 \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(x-1)z = 4x^2(x-1)$$
$$\Uparrow \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$y^2 = z = 4x^2$$

$$\underline{\underline{y = 2x}} \quad \text{pro } x \in I = \mathbb{R}$$

$\cancel{y = -2x}$, $y = 2|x|$, $\cancel{y = -2|x|}$

z ranní diskuse 15.3.2021

POZN (BONUS): $f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0$ ... v tomto tvaru byly homogenní DR

pokud f, g splňují $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x} \quad \forall x,y}$, hovoříme o **EXAKTNÍ DR**

POZN: po vynásobení dx $\underbrace{f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy}_{\omega} = 0$ ... podmínka uzavřenosti diferenciální formy ω

... je "skoro vždy" ekvivalentní tomu, že $\exists H(x,y)$ tak, že $\dfrac{\partial H}{\partial x} = f \quad \dfrac{\partial H}{\partial y} = g$ $\Leftrightarrow$ EXAKTNOST dif. formy ω

... to neznamená nic jiného, než záměnnost 2. parc. deriv. $\boxed{\dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}}$

H se nazývá primitivní funkce k ω

jak se najde H:

$$\Rightarrow \quad H(x,y) = \int f(x,y)\,dx + G(y)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)\,dx + G'(y) \overset{!}{=} g(x,y)$$

pak pokud $\boxed{H(x, y(x)) = C}$ definuje impl. závislost y na x,

tak $\dfrac{d}{dx} H(x, y(x)) = \dfrac{\partial H}{\partial x}\cdot 1 + \dfrac{\partial H}{\partial y}\,y' = \underbrace{f + g y' = 0}_{\text{tj. je splněna naše DR}}$

rovnost $H(x,y) = C$ se nazývá formální (implicitní) řešení DR

Řešení "DÚ" (*) 3 různými způsoby

2. (2 body) Nalezněte maximální řešení diferenciální rovnice

$$2xyy' + 1 + y^2 = 0.$$

Řešení: Po přepisu do tvaru

$$y' + \frac{1}{2x}y = -\frac{1}{2xy}$$

vidíme, že jde o **Bernoulliho** rovnici s $\alpha = -1$. Rovnici nejprve vynásobíme $(1-\alpha)\,y^{-\alpha} = 2y$, takže dostaneme

$$2yy' + \frac{1}{x}y^2 = -\frac{1}{x}.$$

Dále provedeme subsituci

$$z = y^{1-\alpha} = y^2, \qquad (\implies z \geq 0)$$

čímž získáme

$$z' + \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x}.$$

Výslednou LDR řešíme integračním faktorem ($p(x) = \frac{1}{x}$, $P(x) = \ln|x|$, $e^{P(x)} = |x|$, I.F.$=x$). Potom tedy

$$\begin{aligned}(xz)' &= -1\\ zx &= -x + C\\ z &= \frac{C}{x} - 1.\end{aligned}$$

Z toho dopočítáme

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{\frac{C}{x} - 1}.$$

Z podmínky

$$(z =)\ \frac{C}{x} - 1 \geq 0,$$

tj.

$$\frac{C}{x} \geq 1,$$

plyne $x \leq C$ pro $x > 0$ nebo $x \geq C$ pro $x < 0$. Z toho

$$I = \begin{cases}(0, C) & C > 0,\\ (C, 0) & C < 0.\end{cases}$$

Pro $C = 0$ zřejmě řešení neexistuje.

Rovnice je zároveň i **exaktní**, tj. ve tvaru

$$f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0, \qquad \text{kde } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{x}.$$

V našem případě $f(x,y) = 1 + y^2$ a $g(x,y) = 2xy$ a podmínka exaktnosti je zřejmě splněna. Proto lze hledat řešení ve tvaru $H(x,y) = C$, kde nejprve

$$\begin{aligned}H(x,y) &= \int f(x,y)\,\mathrm{d}x + G(y)\\ &== \int \left(1 + y^2\right)\mathrm{d}x = x + xy^2 + G(y),\end{aligned}$$

a dále vypočítáme

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 2xy + G'(y) \stackrel{!}{=} 2xy \ \ (= g(x.y)),$$

z čehož $G'(y) = 0$ a $G(y)$ je libovolná primitivní funkce k G', tj. například opět 0. Implicitní řešení je tedy ve tvaru

$$x + xy^2 = C,$$

z čehož opět snadno vyjádříme

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{C}{x} - 1}.$$

Diskuse nad definičním oborem je již stejná.

Rovnice je zároveň i **separovatelná**. Lze ji upravit na rovnici se separovanými proměnnými a následně vyřešit takto:

$$\begin{aligned}2xyy' + 1 + y^2 &= 0.\\ 2xyy' &= -\left(1 + y^2\right)\\ \frac{2y}{1+y^2}y' &= -\frac{1}{x}\\ \int \frac{2y\mathrm{d}y}{1+y^2} &= -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \ln\left(1 + y^2\right) &= -\ln x + \ln C, \qquad C \neq 0\\ 1 + y^2 &= \frac{C}{x}\\ y &= \pm\sqrt{\frac{C}{x} - 1}.\end{aligned}$$

Diskuse nad definičním oborem je opět stejná.

22.3.2021

RICCATIHO DR

Def: Nechť $a_0, a_1, a_2 \in C(I)$, $I = (a,b)$. Riccatiho DR rozumíme rovnici tvaru

$$\underbrace{y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2}_{y' = f(x,y)} \qquad (*)$$

POZN: $a_0 \equiv 0 \Rightarrow$ jde o Bernoulliho DR pro $\alpha = 2$ $\quad y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$

$a_2 \equiv 0 \Rightarrow$ jde o LDR $\quad y' + p(x)y = q(x)$

POZN: Z existenční teorie plyne, že $(*)$ s poč. podm. $y(x_0) = y_0$ ($x_0 \in I$) má jednoznačné řešení (na $I_0 \subset I$)

POZN: Původ Riccatiho DR je v celé řadě fyz. úloh. Často řešení skončí ve tvaru

$$y(x) = \int \dots \, dx$$

POKUS O ŘEŠENÍ TRANSFORMACÍ NEZÁVISLÉ PROM.

Subst. $x = \varphi(t)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ u \end{pmatrix} \Rightarrow J_\phi = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \dot{\varphi}(t) \overset{!}{\neq} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = y(x) = \underline{y(\varphi(t))}}$$ základní funkční identita

$$\Rightarrow \quad \dot{u}(t) = y'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) \neq 0$$

dosadíme do (*)

$$\dot{u}(t) = \underbrace{a_0(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)}_{A_0(t)} + \underbrace{a_1(\varphi(t))\cdot\dot{\varphi}(t)}_{A_1(t)} u(t) + \underbrace{a_2(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)}_{A_2(t)} u^2(t)$$

POKUS O ŘEŠENÍ SUBST. ZÁVISLE PROMĚNNÉ

Subst.

$$y = \frac{\alpha(x)u + \beta(x)}{\gamma(x)u + \delta(x)} \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in C(I)$$

tj. jde o transformaci souřadnic

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\alpha(t)u + \beta(t)}{\gamma(t)u + \delta(t)} \end{pmatrix}$$

Jacobián transformace je $J_\phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial u}(\dots) \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\alpha(t)u + \beta(t)}{\gamma(t)u + \delta(t)}\right)$

$$= \frac{\alpha(t)(\gamma(t)u + \delta(t)) - (\alpha(t)u + \beta(t))\cdot\gamma(t)}{(\gamma(t)u + \delta(t))^2} = \frac{1}{(\dots)^2}\cdot(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0 \quad \forall t$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow$ dosadíme do (*) : na levé straně :

$$y' = \frac{(\alpha' u + \alpha u' + \beta')(\gamma u + \delta) - (\alpha u + \beta)(\gamma' u + \gamma u' + \delta')}{(\gamma u + \delta)^2}$$

do dosazujeme

$$y = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta}$$

na pravé straně: $\quad \Big| \, (a_0 + a_1 y + a_2 y^2)$

$$\frac{1}{(\gamma u+\delta)^2}\left(a_0(\gamma u+\delta)^2 + a_1(\alpha u+\beta)(\gamma u+\delta) + a_2(\alpha u+\beta)^2\right)$$

položíme $L = P$, vynásobíme $(\gamma u+\delta)^2$

po vydělení

$$\underbrace{(\alpha\delta-\beta\gamma)}_{\neq 0}u' = \underbrace{-\beta'\delta+\beta\delta'}_{\text{zleva}} + a_0\delta^2 + a_1\beta\delta + a_2\beta^2 \quad \Big\}\ A_0$$

$$+\Big(\underbrace{-\alpha'\delta-\beta'\gamma+\alpha\delta'+\beta\gamma'}_{\text{zleva}} + 2a_0\gamma\delta + a_1(\alpha\delta+\beta\gamma) + 2a_2\alpha\beta\Big)u \quad \Big\}\ A_1 u$$

$$+\Big(\underbrace{-\alpha'\gamma+\alpha\gamma'}_{\text{zleva}} + a_0\gamma^2 + a_1\alpha\gamma + a_2\alpha^2\Big)u^2 \quad \Big\}\ A_2 u^2$$

$\Rightarrow$ obecně je to opět Riccatiho DR ve tvaru

$$u' = A_0(x) + A_1(x)u + A_2(x)u^2$$

Otázka: nelze vhodnou volbou $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zařídit, aby
$A_0 \equiv 0$ nebo $A_2 \equiv 0$?

$$A_0 = 0 \Rightarrow \quad -\beta'\delta + \beta\delta' + a_0\delta^2 + a_1\beta\delta + a_2\beta^2 = 0 \quad \forall x$$

protože $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \Rightarrow \beta \neq 0$ nebo $\delta \neq 0$

BÚNO nechť $\beta \neq 0 \Rightarrow$ vydělíme β^2 a získáme

$$\underbrace{\frac{\beta\delta' - \beta'\delta}{\beta^2}}_{\left(\frac{\delta}{\beta}\right)'} + a_0\left(\frac{\delta}{\beta}\right)^2 + a_1\left(\frac{\delta}{\beta}\right) + a_2 = 0$$

Riccatiho DR pro $\dfrac{\delta}{\beta}$

- pokud $\delta \neq 0 \Rightarrow$ vydělíme $\delta^2 \ldots \Rightarrow$ Ricc. DR pro $\frac{\beta}{\delta}$

- pokus o vynulování A_2 (když víme, že $\alpha \neq 0$ nebo $\gamma \neq 0$) analogicky vede na Ricc. DR pro $\frac{\gamma}{\alpha}$, resp. $\frac{\alpha}{\gamma}$

KANONICKÝ TVAR RICC. DR

Def: Rovnice (*) je v kanonickém tvaru $\Leftrightarrow$ $|a_2| \equiv 1 \wedge a_1 \equiv 0$

tj. jde o rovnici $\quad y' = a_0(x) \pm y^2$

- Převod (*) na kanonický tvar za předp.

$$a_2 \in C^2(I) \wedge (\forall x \in I)(a_2(x) \neq 0)$$

1) subst. $y(x) = w(x)u(x)$ (w(x) dosud neznáme)
$w(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

dosadíme do (*) $\quad w'u + wu' = a_0 + a_1 wu + a_2 w^2 u^2$

$$\Rightarrow u' = \frac{a_0}{w} + \left(a_1 - \frac{w'}{w}\right)u + \underbrace{a_2 w}_{\overset{!}{=} \pm 1} u^2$$

$\Rightarrow$ víme, že stačí $\quad w = \pm \frac{1}{a_2(x)}$

$\Rightarrow$ rovnice přejde na tvar $\quad u' = A_0 + A_1 u \pm u^2 \quad$ (**)

2) subst. $u(x) = z(x) + \alpha(x)$ ($\alpha(x)$ je dosud neznámé)

dosadíme do $(**)$

$$z' + \alpha' = A_0 + A_1(z+\alpha) \pm (z+\alpha)^2$$

$$z' = \left(A_0 - \alpha' + A_1\alpha \pm \alpha^2\right) + \underbrace{\left(A_1 \pm 2\alpha\right)}_{! = 0} z \pm z^2$$

chceme, aby zůstalo jen $\pm z^2$

$$\Rightarrow \alpha = \mp \frac{1}{2} A_1$$

NALEZENÍ VŠECH ŘEŠENÍ R.DR PŘI ZNALOSTI JEDNOHO

Nechť $v = v(x)$ splňuje $(*)$, tj: $v' = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 \quad \forall x \in I$

Zvolme bod $x_0 \in I$. Potom bodem $[x_0, v(x_0)]$ prochází právě jedna integrální křivka $(*)$, a to právě funkce v.

Když zvolíme $y_0 \neq v(x_0)$, pak $\exists_1$ řešení $(*)$ (označme ho $y(x)$) procházející bodem $[x_0, y_0]$ a existuje $I_0 = (c,d) \subset I$ tak, že $x_0 \in I_0$ takový, že $(\forall x \in I_0)(y(x) \neq v(x))$

$$\Rightarrow \text{Na } I_0 \text{ lze definovat } z(x) = \frac{1}{\underbrace{y(x) - v(x)}_{\neq 0}}$$

tj. transf. souřadnic $\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{y-v} \end{pmatrix}$

$$J_\phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y-v}\right) \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y-v}\right) = -\frac{1}{(y-v)^2} \neq 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad y = v + \frac{1}{z}$$

$$y' = v' - \frac{1}{z^2} z'$$

dosadíme do (*)

$$v' - \frac{1}{z^2} z' = a_0 + a_1 \left(v + \frac{1}{z} \right) + a_2 \left(v + \frac{1}{z} \right)^2$$

$$\cancel{v'} - \frac{1}{z^2} z' = \cancel{a_0 + a_1 v + a_2 v^2} + a_1 \cdot \frac{1}{z} + 2 a_2 v \cdot \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} \quad \Big| \cdot z^2$$

$$-z' = (a_1 + 2a_2 v) z + a_2$$

(***) $\quad \underline{z' + (a_1 + 2a_2 v) z = -a_2}$ LDR s koef. spojitými na celém I

$\Rightarrow \quad \exists_1$ řeš. z (***) procházející bodem $\left[x_0,\ z_0 = \frac{1}{y_0 - v(x_0)} \right]$

<u>na celém I</u>

Přesto $z \neq 0$ nemusí být splněno na I

(přes bod $z = 0$ nelze prodloužit to řešení $y = v + \frac{1}{z}$)

$\downarrow$

náš výsledek formulujeme jako věta

$(6.1) = (*)$ $\quad (6.2) = (**)$

Nechť $v = v(x)$ je řešením (6.1) na intervalu $I_0 \subset I$. Potom platí:

1. *Je-li y řešením (6.1) takovým, že $(\forall x \in I_0)(y(x) \neq v(x))$, pak funkce*
$$z(x) = \frac{1}{y(x) - v(x)}$$
řeší rovnici (6.2) na intervalu I_0.

2. *Je-li z řešením (6.2) na I_0 a navíc $(\forall x \in I_0)(z(x) \neq 0)$, pak funkce*
$$y(x) = v(x) + \frac{1}{z(x)}$$
je řešením rovnice (6.1) na I_0.

VZTAH R. DR A LDR 2. ŘÁDU

Pozn.: LDR 2. řádu je r.

$$y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$$

kde $p_0, p_1, q \in C(I)$, $I = (a,b)$

Nechť y řeší $(*)$ $\quad y' = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$
na jistém $I_0 \subset I$ a navíc $a_2 \in C^1(I_0)$

Def. $\quad w(x) = \exp\left(-\int a_2(x) y(x)\, dx\right)$

$\Rightarrow w(x) > 0 \quad \forall x$. Nyní vyjádříme y, y'

$$w' = \underbrace{\exp\left(-\int a_2(x) y(x) dx\right)}_{w} \left(-a_2(x) y(x)\right) = \underbrace{-w a_2 y}_{\text{součin tří fcí } \in C^1(I_0) \ \Rightarrow \text{ na } I_0\ \exists w''}$$

$$\Rightarrow \quad y = -\frac{u'}{ua_2}$$ pro $a_2(x) \neq 0 \ \forall x \in I_0$! $\wedge\ u \neq 0$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{-u''ua_2 + u'(u'a_2 + ua_2')}{(ua_2)^2}$$

Nyní dosadíme do (*)

$$\frac{-u''ua_2 + u'(\cancel{u'a_2} + ua_2')}{(ua_2)^2} = a_0 - a_1\frac{u'}{ua_2} + \cancel{a_2\frac{(u')^2}{(ua_2)^2}} \quad \Big| \cdot (ua_2)$$

$$u'' - \left(a_1 + \frac{a_2'}{a_2}\right)u' + a_0a_2u = 0$$

což je LDR 2. řádu s nulovou pravou stranou na I_0.

Nechť a_0, a_1, a_2 jsou spojité na I. Nechť navíc pro $I_0 \subset I$ platí $a_2 \in C^1(I_0)$, $(\forall x \in I_0)(a_2(x) \neq 0)$. Potom platí:

1. *Je-li funkce y řešením (6.1), pak funkce*

$$u = \exp\left(-\int a_2 y \mathrm{d}x\right)$$

   je řešením LDR 2. řádu

$$u'' - \left(a_1 + \frac{a_2'}{a_2}\right)u' + a_0a_2u = 0 \qquad (6.3)$$

   na intervalu I_0.

2. *Naopak, nechť u je řešením (6.3) na I_0 takové, že $(\forall x \in I_0)(u(x) \neq 0)$. Potom funkce*

$$y = -\frac{u'}{ua_2}$$

   řeší (6.1) na I_0.

Nechť v řeší (*):

Pozn: $z = \frac{1}{y-v} \iff y = v + \frac{1}{z} \implies z$ ř. DR dostaneme LDR 1. řádu

alternativně: $y = v + z$

$$y' = \cancel{v'} + z' = a_0 + a_1(v+z) + a_2(v+z)^2$$
$$= \cancel{a_0 + a_1 v + a_2 v^2} + a_1 z + 2a_2 v z + a_2 z^2$$

$$\implies z' = (a_1 + 2av) z + a_2 z^2$$

$$z' - (a_1 + 2av) z = a_2 z^2$$ ... Bernoulliho DR s $\alpha = 2$

vynásobíme $(1-2)z^{-2}$

subst. $u = z^{1-2} = \frac{1}{z}$

$\downarrow$

$y = v + \frac{1}{u}$

LDR 1. řádu

DÚ

$$u'' + p_1(x)u' + p_0(x)u = q(x)$$

DOKÁZAT | a "uhodneme" 1 konkrétní řešení $w(x)$, potom subst. $u(x) = w(x)z(x)$ vede na LDR 1. řádu

jak se to stane?

"metoda snížení řádu LDR"

obecněji: $Lu = q$ $\quad Lu = u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k u^{(k)}$ lin. dif. op. pro LDR n-tého řádu

$\implies$ subst. vede na LDR řádu $(n-1)$

29.3.2021

SPECIÁLNÍ RICCATIHO ROVNICE ("SRDR")

Rovnice (*) $y' = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2$ je ve spec. tvaru

$\iff$ $y' = bx^{\omega} - ay^2$ kde $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ a $\underbrace{\omega \in \mathbb{R}}_{\text{konstanty}}$

! def (**) alternativně: $\boxed{y' + ay^2 = bx^{\omega}}$

Cílem je najít $\omega \in \mathbb{R}$ tak, aby (**) byla řešitelná (alespoň kvadraturami, tj. $y = \int \cdots dx$)

POZN: $a \neq 0 \Rightarrow$ subst. $z = ay \iff y = \frac{1}{a}z \quad y' = \frac{1}{a}z'$

$\hookrightarrow$ dosadíme: $\boxed{z' = abx^{\omega} - z^2}$ kanonický tvar s funkcí $a_0(x) = \underbrace{ab}_{\tilde{b} \neq 0}x^{\omega}$

- pro $\omega = 0$ $\quad y' + ay^2 = b$ .... rovnice se separovanými proměnnými
- pro $\omega = -2$ lze provést subst. $y = \frac{1}{u}$, tj. $y' = -\frac{1}{u^2}u'$

a po dosazení: $-\frac{u'}{u^2} + \frac{a}{u^2} = \frac{b}{x^2}$

$$\frac{u'}{u^2} + \left(\frac{b}{x^2} - \frac{a}{u^2}\right) = 0$$

$g(x,u)u' + f(x,u) = 0$ kde f, g jsou homog. fce st. -2

$\Rightarrow$ převedli jsme na homog. rovnici

Další postup spočívá v transformaci proměnných
$(x,y) \to (t,z)$ tak, abychom dostali
v (t,z) rovnici tvaru
$$\dot{z} + \tilde{a} z^2 = \tilde{b} t^{\tilde{\omega}}$$
tj. speciální Riccatiho rovnici s exponentem $\tilde{\omega} \neq \omega$

Předpokládejme $\tilde{\omega} = f(\omega)$

- pokud umím řešit SRDR s exponentem ω_0, pak umím řešit i SRDR s exponentem ω takovým, že $f(\omega) = \omega_0$
  tj. $\omega = f^{-1}(\omega_0)$ ... udělám transf. $\phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix}$

- pokud umím řešit SRDR s exp. ω_0, pak umím řešit SRDR s exponentem $\omega = f(\omega_0)$ ... udělám transf. $\phi^{-1}\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

SRDR s ω_0 je řeš. $\Rightarrow$ SRDR s $\omega \in \{ f^k(\omega_0) \mid k \in \mathbb{Z} \}$ je řeš. $\leftarrow \omega_k$

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{k\text{-krát}} \quad \text{pro } k > 0$$

$$f^k = \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \dots \circ f^{-1}}_{-k\text{-krát}} \quad \text{pro } k < 0$$

V dalším výkladu budeme zkoumat tvar ϕ

1) subst. $y = \alpha(x) u(x) + \beta(x)$ (spec. případ $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ $\gamma \equiv 0$, $\delta \equiv 1$)

dosadíme do (**) $\Rightarrow$ $\alpha' u + \alpha u' + \beta' + a(\alpha u + \beta)^2 = b x^{\omega}$ | roznásobíme a vydělíme α

$$\Rightarrow \quad u' + \frac{1}{\alpha}(\beta' + a\beta^2) + \frac{1}{\alpha}(\alpha' + 2a\alpha\beta) u + a\alpha u^2 = \frac{b}{\alpha} x^{\omega} \qquad \text{def (***)}$$

aby tento výraz byl SRDR, muselo by:

- $\frac{1}{\alpha}(\alpha' + 2a\alpha\beta) \overset{!}{=} 0$
- $\frac{1}{\alpha}(\beta' + a\beta^2) \overset{!}{=} 0$ nebo $\beta' + a\beta^2 = \text{konst.}\, x^\omega$
- $\underline{\alpha a = \text{konst.} \Rightarrow \alpha = \text{konst}}$ ← na tuto podmínku rezignujeme
- $\alpha = cx^\nu$ $(c \neq 0)$ a $\nu \neq 0$ $\Rightarrow \frac{b}{\alpha} x^\omega = \frac{b}{c} x^{\omega-\nu}$ $\neq \omega$

spor

Vyřešíme $\beta' + a\beta^2 = 0 \iff \frac{\beta'}{\beta^2} = -a$

$$\frac{1}{\beta} = ax + K \iff \beta = \frac{1}{ax+K}, \quad K \in \mathbb{R}$$

tuto a $\alpha = cx^\nu$ dosadíme do $\alpha' + 2a\alpha\beta = 0$

$$c\nu x^{\nu-1} + 2acx^\nu \frac{1}{ax+K} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Big| \cdot \frac{1}{cx^{\nu-1}}$$

$$\nu + 2ax \frac{1}{ax+K} = 0 \quad \forall x$$

$\Rightarrow K = 0 \wedge \nu = -2 \wedge c$ libovolné $(\Rightarrow$ zvolíme $c = 1)$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = x^{-2} \wedge \beta = \frac{1}{ax} \Rightarrow y = \frac{u}{x^2} + \frac{1}{ax} \; (= \alpha u + \beta)}$$

dohromady dá $\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \phi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dosadíme zpět do $\cancel{(\ast\ast)}$ $\Rightarrow \underline{u' + \frac{a}{x^2}u^2 = bx^{\omega+2}}$ | jen pro $x \neq 0$

- Další krok $\boxed{\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \psi\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{\omega+3} \\ \frac{1}{u} \end{pmatrix}}$

regularita! $\det J_\phi = \begin{vmatrix} (\omega+3)x^{\omega+2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{u^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{u^2} x^{\omega+2}(\omega+3) \neq 0$

$\Rightarrow x \neq 0 \wedge \omega \neq -3$

$$u(x) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{z(x^{w+3})}$$

dosadíme $\quad u' = \frac{-1}{z^2}\dot{z}\,(w+3)\,x^{w+2} + \frac{a}{x^2 z^2} = b\,x^{w+2} \quad \Big|\ \frac{z^2}{x^{w+2}}$

$$-\dot{z}(w+3) + \frac{a}{x^{w+4}} = bz^2$$

$$\dot{z} + \frac{b}{w+3}z^2 = \frac{a}{w+3}x^{-(w+4)} \qquad t = x^{w+3}$$

$$\boxed{\dot{z} + \underbrace{\frac{b}{w+3}}_{\tilde{a}\neq 0} z^2 = \underbrace{\frac{a}{w+3}}_{\tilde{b}\neq 0} t^{-\frac{w+4}{w+3}}} \quad -\frac{w+4}{w+3} = \tilde{w}$$

SRDR s $\tilde{w} \neq w$

$$\Rightarrow \quad f(w) = \tilde{w} = -\frac{w+4}{w+3}$$

tj. jestliže w_0 je "řešitelný" exp. a $w_k = f^k(w_0)$, pak

$$w_k + 2 = -\frac{w_{k-1}+4}{w_{k-1}+3} + 2$$

TRIK :-)

$$= \frac{-(w_{k-1}+4) + 2(w_{k-1}+3)}{w_{k-1}+3} = \frac{w_{k-1}+2}{w_{k-1}+3}$$

$w_0 \in \{0, -2\}$

pro $w_{k-1} = -2$ dostáváme $w_k = -2$

ale naštěstí $w_0 = 0$ už nevede na konst. posl. w_k

$$\boxed{\frac{1}{w_k+2} = \frac{w_{k-1}+3}{w_{k-1}+2} = 1 + \frac{1}{w_{k-1}+2}}$$

$$\frac{1}{w_k+2} = k + \frac{1}{w_0+2} \qquad \text{pro } k \in \mathbb{N}$$

resp.
$$\frac{1}{w_{k-1}+2} = \frac{1}{w_k+2} - 1$$

$$\frac{1}{w_{-k}+2} = \frac{1}{w_0+2} - k$$

$k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\frac{1}{w_k+2} = k + \frac{1}{w_0+2} \qquad \text{pro } k \in \mathbb{Z}}$$

pro $w_0 = 0$
$$\frac{1}{w_k+2} = k + \frac{1}{2} = \frac{2k+1}{2}$$

$$w_k + 2 = \frac{2}{2k+1}$$

$$\boxed{w_k = \frac{2}{2k+1} - 2 = -\frac{4k}{2k+1}} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

POZN: Lze dokázat, že tyto hodnoty jsou jediné hodnoty w, pro které má SRDR řešení (v kvadraturách)

POZN: Vzhledem ke vztahu mezi RDR a LDR 2. řádu je vidět, že "naprostá většina" LDR 2. řádu s nekonst. koef. vůbec nejde analyticky vyřešit.

(Př) $$y' = \frac{1}{x^4}e^x + y + 2e^{-x}y^2$$ Riccatiho DR v obecném tvaru

Nápověda: převod do kanon. tvaru: zbavit se $2e^{-x}$ u y^2

zkusit subst. $y = e^x u$, $y' = e^x(u+u')$

$$\underbrace{e^x(u+u')}_{\text{odečte se}} = \frac{1}{x^4}e^x + \underbrace{e^x u}_{} + 2e^x u^2 \quad \Big| \cdot \frac{1}{e^x}$$

bude konst.

$$\underline{u' - \underbrace{2}_{a}u^2 = \underbrace{x^{-4}}_{b}}$$

SRDR s $w = -4$

$$\boxed{w_k = -\frac{4k}{2k+1}}$$

$$-4 = -\frac{4k}{2k+1}$$

$$8k + 4 = 4k$$

$k = -1$ $\Rightarrow$ $w = w_{-1} = f^{-1}(w_0) = f^{-1}(0)$

$\Rightarrow$ "naše" rovnice vznikla z řešitelné SRDR (s $w=0$)

$1\times$ provedením Φ^{-1}

$\Rightarrow$ provedením $1\times$ Φ dostaneme "zpět" řešitelnou SRDR

$y = \frac{u}{x^2} + \frac{1}{ax}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{w+3} \\ \frac{1}{u} \end{pmatrix}}$$

nejprve:

$$u = \frac{v}{x^2} - \frac{1}{2x}$$

$$u' = \frac{v'}{x^2} - \frac{2v}{x^3} + \frac{1}{2x^2}$$

$u' + \frac{a}{x^2}u^2 = bx^{w+2}$

po dosazení

$$v' - \frac{2}{x^2}v^2 = x^{-4+2} = \frac{1}{x^2}$$

subst. $t = x^{w+3} = \frac{1}{x}$

$z = \frac{1}{v}$ ... $v = \frac{1}{z}$ $\quad v' = -\frac{1}{z^2}\cdot \dot{z}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2z^2}\cdot\dot{z}$

$$\frac{1}{x^2 z^2}\cdot \dot{z} - \frac{2}{x^2}\cdot\frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2} \quad \Big| \cdot x^2 z^2$$

$$\dot{z} - 2 = z^2$$ rovnice se sep. prom.

$$\frac{\dot{z}}{z^2+2} = 1$$ (SRDR s $w=0$ .. tj. je tam t^0)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = t + C$$

$$\underline{z = \sqrt{2}\operatorname{tg}\left(\sqrt{2}(t+C)\right)}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cotg}\left(\sqrt{2}(t+C)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cotg}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}+\tilde{C}\right) \qquad \tilde{C} = \sqrt{2}C$$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{\sqrt{2}x^2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}+\tilde{C}\right) - \frac{1}{2x}$$

$$\Rightarrow y = e^x . u = e^x\left[\frac{1}{\sqrt{2}x^2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}+\tilde{C}\right) - \frac{1}{2x}\right]$$

POZN:

$$v' - \frac{2}{x^2}v^2 = \frac{1}{x^2}$$ je už také separovatelná rovnice

$$v'x^2 - 2v^2 = 1$$

$$\frac{v'}{1+2v^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}v\right) = -\frac{1}{x} + D$$

$$\Rightarrow \underline{v = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\left(-\frac{\sqrt{2}}{x}+\tilde{D}\right)}$$ kde $\tilde{D} = \sqrt{2}D$

$$\overset{?}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cotg}\left(\frac{\sqrt{2}}{x}+\tilde{C}\right)$$ $\operatorname{tg}(-\alpha+\tilde{D}) = \operatorname{cotg}(\alpha+\tilde{C})$

DÚ jaký je vztah mezi $\tilde{D}$ a $\tilde{C}$?

$\boxed{12.4.2021}$ 1. část cv. – dokončení Riccatiho DR

RICCATIHO ROVNICE – PŘÍKLADY

Př $\quad y' = y^2 - xy - x$

Nápověda: $v(x) = ax+b \qquad v'(x) = a$

dosadíme $\quad a = (ax+b)^2 - x(ax+b) - x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$x^0: \ a = b^2$

$x^1: \ 2ab - b - 1 = 0 \qquad \Leftarrow \ a=b=0$ není řeš.

$x^2: \ 0 = a^2 - a = a(a-1) \qquad a=b=1$ je řeš.

$\Rightarrow v(x) = x+1 \quad \Rightarrow \quad y = v(x) + \frac{1}{z(x)} \qquad y' = 1 - \frac{1}{z^2}z'$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{z^2}z' = \left(x+1+\frac{1}{z}\right)^2 - x\left(x+1+\frac{1}{z}\right) - x$$

$$\frac{1}{z^2}z' = 2(x+1)\frac{1}{z} - x\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \quad \Big| \cdot z^2$$

$$z' = (x+2)z + 1$$

$z' - (x+2)z = 1 \qquad$ Metoda IF: $\quad p(x) = -(x+2)$

$P(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2$

$IF = e^{-\frac{1}{2}(x+2)^2}$

$$\left(z e^{-\frac{1}{2}(x+2)^2}\right)' = e^{-\frac{1}{2}(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad z(x) = e^{\frac{1}{2}(x+2)^2} \int e^{-\frac{1}{2}(x+2)^2}\,dx \qquad \Rightarrow \quad y = x+1+\frac{1}{z}$$

Př $\quad y' = 2x + x^3 y - x y^2 \qquad$ využít znalost řešení $v(x) = x^2$

Subst. $y = x^2 + \frac{1}{z}$ --- DÚ dosadit --- vyjde LDR 1. ř.

kuchařka $\quad z(x) = \frac{1}{y(x) - v(x)}$

vyjde … $\quad y = x^2 + \left(e^{\frac{x^4}{4}} \int x e^{-\frac{x^4}{4}}\,dx\right)^{-1}$

Př $y' + xy^2 - x^3y - 2x = 0 \iff y' = 2x + x^3y - xy^2$

Nápověda: využijte subst. $z = x^2 - y \iff y = x^2 - z$

$\Rightarrow$ nedostaneme LDR, ale Bernoulliho DR

$\Rightarrow$ DÚ

12. 4. 2021 2. část

ROVNICE TVARU $x=f(y')$ a $y=g(y')$

- opět spec. příp. DR 1. řádu $F(x,y,y')=0$

1) $x=f(y')$ – kuchařka

subst. $x=f(t)$, tj: $t=y'$

$$\Rightarrow \quad y=\int y'(x)\,dx=\int t(x)\,dx=\int t\dot{f}(t)\,dt$$

$x=f(t)$

$dx=\dot{f}(t)\,dt$

$\Rightarrow$ parametrický popis integrální křivky dané fcí $y=y(x)$

POZN: Formální postup: předp. $x=x(y)$, $t=t(y)$

$$x=f(t)\quad\Big|\ \frac{d}{dy}$$

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{dx}{dy}=\dot{f}(t)\frac{dt}{dy}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dt}=\dot{f}(t)\cdot t$$

$$\Rightarrow y=\int t\dot{f}(t)\,dt$$

$\Rightarrow$

Nechť f má na (t_1,t_2) spojitou derivaci různou od nuly. Nechť

$$a=\inf_{t\in(t_1,t_2)} f(t),\qquad b=\sup_{t\in(t_1,t_2)} f(t).$$

pro $f'>0$ $\quad a=\lim_{t\to t_1+} f(t)$ $\quad b=\lim_{t\to t_2-} f(t)$

Potom každým bodem $[x_0,y_0]\in(a,b)\times\mathbb{R}$ prochází právě jedna integrální křivka rovnice $x=f(y')$ definována na celém (a,b). Parametrické rovnice této křivky jsou

$$x=f(t),$$

$$y=y_0+\int_{t_0}^{t}\tau\dot{f}(\tau)\,d\tau$$

pro $t\in(t_1,t_2)$, přičemž $f(t_0)=x_0$.

DK (korektní): $f' \neq 0$ na $(t_1,t_2) \Rightarrow f$ je ryze monotónní $\Rightarrow f$ prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}: (a,b) \to (t_1,t_2)$

navíc pro $f' > 0$ $\quad a = \lim_{t\to t_1+} f(t) \quad b = \lim_{t\to t_2-} f(t)$

pro každé $x \in (a,b)$ lze vyjádřit $\quad x = f(y')$
$\Leftrightarrow \quad y' = f^{-1}(x)$

je spec. LDR 1. řádu
$\Rightarrow$ jednoznačnost int. křivky procház. $[x_0,y_0]$

$\Rightarrow \quad y = \int f^{-1}(x)\,dx + C$

konkrétní volba C aby $y(x_0)=y_0$

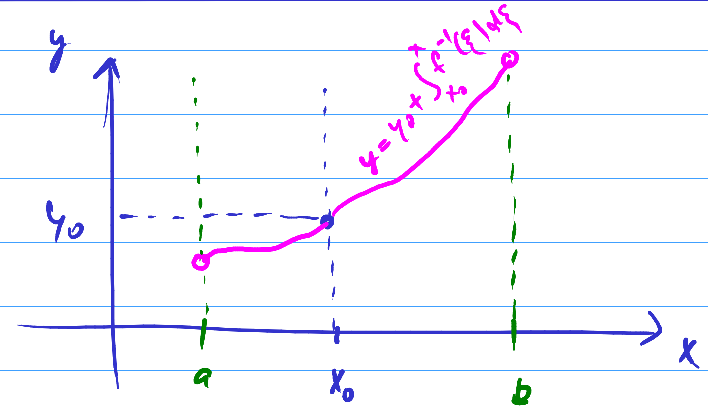
$\Rightarrow \quad y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f^{-1}(\xi)\,d\xi =$

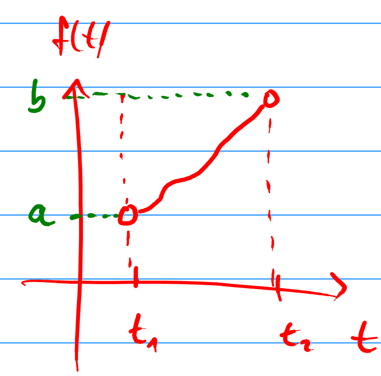
$= \left[\text{subst. } \begin{array}{l}\xi = f(\tau)\\ d\xi = \dot f(\tau)\,d\tau\end{array}\right] = y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau\,\dot f(\tau)\,d\tau$

kde $t_0 = f^{-1}(x_0) \Leftrightarrow x_0 = f(t_0)$
$t = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(t)$

∎

POZN:





2) Rovnice $y = g(y')$ – kuchařka:

subst. závislé proměnné $y = g(t) \Leftrightarrow t = y'$

jestliže $x = x(y)$, pak $\boxed{x = \int \dot{x}(y)\,dy = \int \frac{1}{t}\,dy = \int \frac{1}{t}\dot{g}(t)\,dt}$

$\dot{x} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{t}$ $\quad$ $y = g(t)$, $dy = \dot{g}(t)\,dt$

POZN: Formální odvození

předp. $t = t(x)$, $y = y(x)$

$$y = g(t) \quad \Big| \ \frac{d}{dx}$$

$$t = y' = \dot{g}(t)\cdot\frac{dt}{dx} \implies \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}\dot{g}(t)$$

$$\implies x = \int \frac{1}{t}\dot{g}(t)\,dt$$

$t \neq 0$

tj. $y' \neq 0$

POZN: Pokud $0 \in D_g$, pak $y(x) = g(0)$ řeší $y = g(y')$

$\implies$

Nechť g má na (t_1, t_2) spojitou derivaci různou od nuly a navíc nechť $0 \notin (t_1, t_2)$. Nechť

$$\alpha = \inf_{t\in(t_1,t_2)} g(t), \qquad \beta = \sup_{t\in(t_1,t_2)} g(t).$$

Potom každým bodem $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}\times(\alpha,\beta)$ prochází právě jedna integrální křivka rovnice $y = g(y')$ definována na intervalu (a, b), kde

$$a = x_0 + \inf_{t\in(t_1,t_2)} \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{g}(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau, \qquad b = x_0 + \sup_{t\in(t_1,t_2)} \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{g}(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau.$$

Parametrické rovnice této křivky jsou

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{g}(\tau)}{\tau}\mathrm{d}\tau,$$
$$y = g(t)$$

pro $t \in (t_1, t_2)$, přičemž $g(t_0) = y_0$.

Dk.: $g' \neq 0$, spojitá $\Rightarrow$ g je ryze monotónní $\Rightarrow$ prostá

$\Rightarrow \exists\, g^{-1} : (\alpha, \beta) \to (t_1, t_2)$

$\Rightarrow \forall y \in (\alpha, \beta) \quad y = g(y') \Leftrightarrow y' = g^{-1}(y)$ DR se separ. prom.

má jednoznačné řešení prob. $[x_0, y_0]$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y'}{g^{-1}(y)} = 1 \quad \Big| \int \dots dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g^{-1}(y)} = x + C$$

kontrolní primit. fce aby $y(x_0) = y_0$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g^{-1}(\eta)} = x - x_0 \quad \to$$

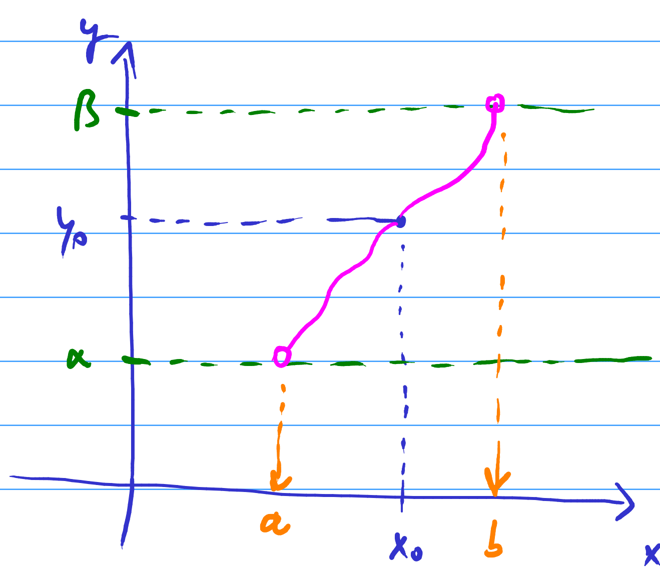
subst. $\eta = g(\tau)$, $d\eta = \dot{g}(\tau)\, d\tau$

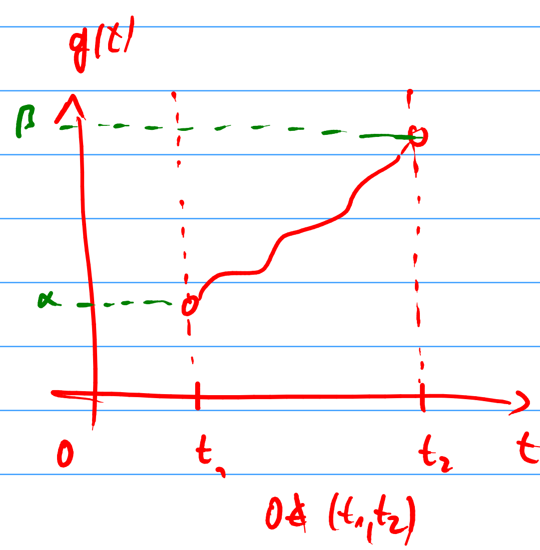
$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\tau}\, \dot{g}(\tau)\, d\tau = x - x_0$$

kde $t_0 = g^{-1}(y_0) \Leftrightarrow y_0 = g(t_0)$

$t = g^{-1}(y) \Leftrightarrow y = g(t)$

POZN





Př $\quad (y')^3 + y' - x = 0 \qquad$ rovnice $x = f(y')$ hde $f(t) = t^3 + t$

$\Rightarrow$ řeš. je $\boxed{x = f(t) = t^3 + t}$

$\dot f(t) = 3t^2 + 1 > 0 \qquad \dot f$ je rostoucí a spoj. na $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow y = \int t \dot f(t)\,dt = \int t\,(3t^2+1)\,dt =$$

$$= \int 3t^3 + t\,dt = \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + C$$

nebo podle vět:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau \dot f(\tau)\,d\tau = y_0 + \int_{t_0}^{t} \tau(3\tau^2+1)\,d\tau = \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 \underbrace{- \frac{3}{4}t_0^4 - \frac{1}{2}t_0^2 + y_0}_{= C}$$

Př $\quad x = y' \cos y' = f(y') \qquad$ hde $f(t) = t \cos t$

$x = t\cos t \qquad \dot f(t) = \cos t - t \sin t \quad \dots$ není nutné

$$y = \int t \dot f(t)\,dt = t f(t) - \int f(t)\,dt = t^2 \cos t - \underbrace{\int t \cos t\,dt}_{\text{nutné znovu per partes}} = \dots \quad \text{DÚ}$$

per partes

$u = t \qquad \dot v = \dot f(t)$

$\dot u = 1 \qquad v = f(t)$

Pozn. : $x = t\cos t \;\Big|\; \frac{d}{dy}$

$$\boxed{\frac{1}{t} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{dx}{dy} = (t\cos t)^{\cdot} \cdot \frac{dt}{dy}} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = t(t\cos t)^{\cdot}$$

$$\Rightarrow y = \int t(t\cos t)^{\cdot}\,dt = \dots$$

Př. $y = (y')^2 + 4(y')^3 \quad \Leftrightarrow \quad y = g(y') \quad$ kde $g(t) = t^2 + 4t^3$

subst. $\boxed{y = g(t) = t^2 + 4t^3}$

$$\dot{g}(t) = 2t + 12t^2$$

$$\boxed{x = \int \frac{1}{t}\dot{g}(t)\,dt = \int \frac{1}{t}(2t + 12t^2)\,dt = \int 2 + 12t\,dt = 2t + 6t^2 + C}$$

Pozn. : $y = t^2 + 4t^3 \;\Big|\; \frac{d}{dx}$

$$t = y' = (2t + 12t^2)\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}(2t + 12t^2) = 2 + 12t$$

$$\Rightarrow x = \int 2 + 12t\,dt = 2t + 6t^2 + C$$

$\boxed{19.4.2021}$ – část (a)

CLAIRAUTOVA DR

def (*)

C. DR je ve tvaru $\underline{y = xy' + g(y')}$ to není $y = g(y')$

je to $y = h(x, y') = xy' + g(y')$

Kuchařka – formální postup : $t = y'$

def. (**) $\quad y = xt + g(t) \;\Big|\; \frac{d}{dx}$ kde $t = t(x)$, $y = y(x)$

jestliže platí…

$$t = y' = t + x\frac{dt}{dx} + \dot{g}(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$0 = \frac{dt}{dx}\left(x + \dot{g}(t)\right)$$

… pak platí

1. $\frac{dt}{dx} = 0 \iff t = C$ (nezávisí na x)

$\iff y' = C \iff y = Cx + D$ (nevíme, co je D)

správně: dosadíme do (**) : $y = Cx + g(C)$ … $D = g(C)$

2. $x + \dot{g}(t) = 0 \iff \underline{x = -\dot{g}(t)}$

opět dosadíme do (**) : $\underline{y = -t\dot{g}(t) + g(t)}$ … nezávisí na žádném C

POZN: totéž získáme formálním zderivováním (**) podle y

(**) $\quad y = xt + g(t) \;\Big|\; \frac{d}{dy}$ $\quad x = x(y)$, $t = t(y)$

$$\cancel{1 = \frac{dx}{dy}t} + x\frac{dt}{dy} + \dot{g}(t)\frac{dt}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{t}$$

$$0 = \frac{dt}{dy}\left(x + \dot{g}(t)\right)$$

Nechť $(t_1,t_2) \subset \mathbb{R}$ a $g : (t_1,t_2) \to \mathbb{R}$. Potom pro každé $C \in (t_1,t_2)$ je funkce

$$y(x) = Cx + g(C) \tag{9.4}$$

řešením rovnice

$$y(x) = xy'(x) + g(y'(x)) \,. \qquad (*) \tag{9.1}$$

Dále nechť $g \in C^2((t_1,t_2))$ a navíc $(\forall t \in (t_1,t_2))(\ddot{g}(t) \neq 0)$. Potom existuje integrální křivka rovnice (9.1) definovaná na intervalu $(a,b) = -\dot{g}((t_1,t_2))$, která je popsána parametrickými rovnicemi

$$x = X(t) = -\dot{g}(t)\,,$$
$$y = Y(t) = -\dot{g}(t)\,t + g(t)\,.$$

Dk: $y = Cx + g(C) \Rightarrow y' = C$ a dosadíme do $(*)$

$$y = xC + g(C)$$

$\ddot{g}(t) \neq 0$ na $(t_1,t_2) \Rightarrow -\dot{g}(t) = X(t)$ je ryze monotónní, prostá

$\Rightarrow$ jestliže $(a,b) = -\dot{g}((t_1,t_2)) = X((t_1,t_2))$, tak $\exists X^{-1} : (a,b) \to (t_1,t_2)$

$\forall x \in (a,b)$ je $X^{-1}(x) \in (t_1,t_2)$

uvažujme $y(x) = Y(t)$ kde $x = X(t)$, resp. $t = X^{-1}(x)$

potom $\dot{Y}(t) = y'(X(t))\,\dot{X}(t) = -y'(x)\,\ddot{g}(t)$

z $Y(t) = -\dot{g}(t)t + g(t)$ dostaneme zderivováním podle t

$$\dot{Y}(t) = -\ddot{g}(t)t - \dot{g}(t) + \dot{g}(t) = -\ddot{g}(t)\,.t$$

srovnáním $y'(x) = t$

$\ddot{g}(t) \neq 0$!

dosadíme $y'(x) = t$

$$Y(t) = \underbrace{-\dot{g}(y'(x))}_{x}\,y'(x) + g(y'(x))$$
$$y(x) = x\,y'(x) + g(y'(x))$$

Př $x = (y')^2 + \frac{y}{y'} \iff y = xy' \underbrace{-(y')^3}_{g(y')}$ (*) Clairautova DR

$t = y'$ (**) $y = xt - t^3 \,\Big|\, \frac{d}{dx}$

$$y' = t = t + x\frac{dt}{dx} - 3t^2\frac{dt}{dx}$$

$$0 = \frac{dt}{dx}\left(x - 3t^2\right)$$

1) $\frac{dt}{dx} = 0 \iff t = C \Rightarrow$ dosazením do (**) $\underline{y = Cx - C^3}$

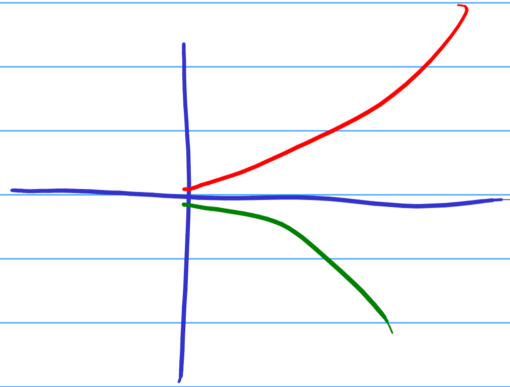
2) $x - 3t^2 = 0 \iff \underline{x = 3t^2}$ a dosazením do (**)

$$y = xt - t^3 = 3t^3 - t^3 = \underline{2t^3}$$

POZN: Lze přejít k $y = y(x)$

$t = \pm\sqrt{\frac{x}{3}}$ ... $x \geq 0$

$y = 2t^3 = 2\left(\pm\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}x^{\frac{3}{2}}$ $I = (0, +\infty)$



DÚ Vyřešit derivací (**) podle y

Pr

$$y = xy' - \underbrace{e^{y'}}_{g(y')}$$

$$t = y' \Rightarrow \underline{y = xt - e^{t}} \quad (**) \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

$$y' = t = t + x\frac{dt}{dx} - e^{t}\frac{dt}{dx}$$

$$0 = \frac{dt}{dx}\left(x - e^{t}\right)$$

1) $\frac{dt}{dx} = 0 \Rightarrow t = C \Rightarrow y = Cx - e^{C}$

2) $x - e^{t} = 0 \iff x = e^{t} \iff t = \ln x \quad x \in (0, +\infty) = I$

a dosaz. do (**) $y = e^{t}t - e^{t}$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = x\ln x - x}$$

$\boxed{19.4.2021}$ - část (b)

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE n-TÉHO ŘÁDU

LDR n-tého řád

$$Ly(x) = q(x) \qquad \text{kde } q \in C((a,b)) \text{ a } p_k \in C((a,b)) \; k=0,\dots,n-1$$

$$(Ly)(x) = y^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)\, y^{(k)}(x)$$

$$L : C^{(n)}((a,b)) \to C((a,b)) \qquad Ly = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k y^{(k)}$$

L... lineární diferenciální operátor n-tého řádu

$f, g \in C^{(n)}((a,b))$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

alternativně $\tilde{L}y = \sum_{k=0}^{n} \tilde{p}_k y^{(k)}$ kde $\tilde{p}_n(x) \neq 0 \;\; \forall x \in (a,b)$

LDR zapsané jako rovnost funkcí -

$Ly = q$

pak $p_k(x) = \dfrac{\tilde{p}_k(x)}{\tilde{p}_n(x)} \qquad \forall k = 0,1,\dots,n-1$

<u>POZN</u>: LDR s konstantními koeficienty

$$\tilde{L}y = \tilde{q} \qquad \text{kde } \tilde{p}_k(x) = a_k \quad \text{a} \quad a_n \neq 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \tilde{q}$$

<u>Vlastnosti LDR</u>:

- L je lin. operátor: $L \in \mathcal{L}(C^{(n)}((a,b)), C((a,b)))$

  tj. $L(\alpha y + z) = \alpha Ly + Lz$

- $Ly = \theta$ ($\theta(x) = 0 \;\; \forall x$) nazýváme LDR n-tého řádu BEZ PRAVÉ STRANY

  $Ly = q$ —— " —— S PRAVOU STR.

- y, z řeší $Ly = 0$, tj. $Ly = 0 \wedge Lz = 0$

$\Rightarrow$ $L(\alpha y + z) = \alpha Ly + Lz = \alpha 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow$ množina řešení rovnice $Ly = 0$ je uzavřená vůči sčítání a násobení konst. $\Rightarrow$ je to vekt. prostor

Ozn. $\mathcal{L}_0$

- $\dim \mathcal{L}_0 = n$

$\Leftrightarrow$ v $\mathcal{L}_0$ existuje n-členná báze funkcí:

$\mathcal{L}_0 = [y_1, \dots, y_n]_\lambda$ kde $(y_1, \dots, y_n)$ jsou LN funkce

$\hookrightarrow$ $(y_1, \dots, y_n)$ jsou LZ $\Leftrightarrow$ $\left(\exists \underset{\text{netriv}}{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \theta\right)$

je LZ soubor fcí

tj. $(\forall x \in (a,b))\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x) = 0\right)$

$\hookrightarrow$ $(y_1, \dots, y_n)$ jsou LN $\Leftrightarrow$ soubor $(y_1, \dots, y_n)$ není LZ

- $(y_1, \dots, y_n)$ LN a takový, že $\mathcal{L}_0 = [y_1, \dots, y_n]_\lambda$ se nazývá <u>FUNDAMENTÁLNÍ SYSTÉM</u> rovnice $Ly = 0$

- Předp. že y_p řeší $Ly = q$ (tj. platí $Ly_p = q$)

tzv. partikulární řešení

Nechť $z \in \mathcal{L}_q$ .... $\mathcal{L}_q = \{ y \in C^{(n)}((a,b)) \mid Ly = q \}$

množina všech řeš. $Ly = q$

$$\left.\begin{aligned} Ly_p &= q \\ Lz &= q \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} Ly_p - Lz &= \theta \\ L(y_p - z) &= \theta \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y_p - z &\in \mathcal{L}_0 \\ z - y_p &\in \mathcal{L}_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad z = y_p + y_0$ kde $y_0 \in \mathcal{L}_0 \quad \Rightarrow \mathcal{L}_q$ je lineární varieta

$$\mathcal{L}_q = \underbrace{y_p}_{\text{zaměření}} + \underbrace{\mathcal{L}_0}_{\text{jádro}} = \{ y_p + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{L}_0 \}$$

Př (metoda snížení řádu)

Mějme rovnici tvaru $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x)$

tj. ve funkcionním tvaru $y'' + p_1 y' + p_0 y = q$

Nechť v řeší LDR s nulovou pravou stranou, tj. $\underbrace{v'' + p_1 v' + p_0 v}_{Lv} = \theta$

Subst. $y = uv \qquad u = u(x), \; v = v(x)$

Pak $y' = u'v + uv'$

$y'' = u''v + 2u'v' + uv'' \qquad \Rightarrow$ dosadíme do

(Leibniz) $\qquad y'' + p_1 y' + p_0 y = q$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

$$u''v + 2u'v' + uv'' + p_1(u'v + uv') + p_0 uv = q$$

$$u\underbrace{(v'' + p_1 v' + p_0 v)}_{Lv = \theta} + u'(\dots) + u''(\dots) = q$$

subst. $z = u' \quad \Rightarrow$ dostaneme $z(\dots) + z'(\dots) = q$

tj. LDR 1. řádu

Pozn: L .. lin. dif. op. n-tého řádu a $Lv = 0$

$\Rightarrow$ subst. $y = uv$ dostaneme $L(uv)$

(Dú .. dokázat) $\qquad$ neobsahuje u

$\Rightarrow$ subst. $z = u'$ vede na LDR řádu (max.) $n-1$

musí $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, ... pak máme LDR 2. ř.

Př. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 16 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{L}y = \tilde{q} \;\Big|\; \frac{1}{x^2} \;..\; Ly = q$

přitom víme, že $v(x) = x^2$ řeší $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0$

subst. $y(x) = \underbrace{x^2 \cdot u(x)}$
$y'(x) = x^2u'(x) + \underbrace{2xu(x)}$
$y''(x) = x^2u''(x) + 4xu'(x) + \underbrace{2u(x)}$

$\Rightarrow$ to co je modré dosadíme:

$$x^2(x^2u'' + 4xu') - 5x(x^2u') = 16$$
$$x^4u'' - x^3u' = 16 \qquad \Big| \text{ subst. } z = u' \text{ a vydělíme } x^4$$
$$z' - \frac{1}{x}z = \frac{16}{x^4}$$

$p(x) = -\frac{1}{x} \qquad P(x) = -\ln|x| \qquad IF = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|} \approx \frac{1}{x}$

$$\left(\frac{1}{x}z\right)' = \frac{16}{x^5}$$

$$\frac{1}{x}z = -\frac{4}{x^4} + \tilde{C}$$
$$u' = z = -\frac{4}{x^3} + \tilde{C}x$$

$$u = \int -\frac{4}{x^3} + Cx \, dx = \frac{2}{x^2} + \underbrace{\frac{1}{2}\tilde{C}}_{C}x^2 + D$$

$$y = x^2u = 2 + Cx^4 + Dx^2$$

$y_p(x) = 2 \qquad y_1(x) = x^4 \qquad y_2(x) = x^2$

$$y \in y_p + \underbrace{[y_1, y_2]_\lambda}_{S_0}$$

$I = \mathbb{R}$

(pro LDR ve $Ly = q$: $I_1 = (-\infty, 0) \vee I_2 = (0, +\infty)$)

26.4.2021 extra-dlouhé cvičení

LDR n-tého řádu s konst. koeficienty

$\tilde{L}y = \tilde{q}$ kde $\tilde{p}_k(x) = a_k$ a $a_n \neq 0$

$$\tilde{L}y = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \tilde{q} \qquad \text{kde } a_n \neq 0$$

? Jak se najde FS rovnice $\tilde{L}y = \theta$?

Def. Charakteristickým polynomem rovnice $\tilde{L}y = \theta$ rozumíme polynom

$$\ell(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$$

POZN: Nechť $y(x) = e^{\lambda x}$ je řešením $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$

tj. platí $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right) e^{\lambda x} = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\iff \quad \ell(\lambda) = 0$

VĚTA: Nechť λ je m-násobným kořenem $\ell(\lambda)$. Potom

$$(y_{\lambda,0}, \dots, y_{\lambda,m-1}) \quad \text{kde } y_{\lambda,j}(x) = x^j e^{\lambda x}$$

je LN souborem (o m členech) řešení rovnice $\tilde{L}y = \theta$.

- $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ jsou všechny navzájem různé kořeny $\ell(\lambda)$ s násobnostmi $m_1, \dots, m_M$, pak soubor

1) $\left(y_{\lambda_1,0}, \dots, y_{\lambda_1,m_1}, y_{\lambda_2,0}, \dots, y_{\lambda_2,m_2}, \dots, y_{\lambda_M,1}, \dots, y_{\lambda_M,m_M}\right)$

je LN a má právě n členů $\Rightarrow$ jde o FS rovnice $\tilde{L}y = \theta$

↑ zákl. věta algebry

2) λ_j mohou být i komplexní

3) Protože $\ell(\lambda)$ má reálné koef
$\Rightarrow$ jeho kořeny jsou buď reálné, nebo jsou po dvou komplexně sdružené.
Kompl. sdr. kořeny mají stejnou násobnost.

$$\ell(\lambda) = \prod_j \underbrace{(\lambda-\lambda_j)}_{\lambda_j \in \mathbb{R}}^{m_j} \cdot \prod_j \underbrace{(\lambda^2+a\lambda+b)}_{\text{nemá kořeny v } \mathbb{R}}^{m_j}$$

POZN: Pro $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

def. $f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

tak potom $(e^z)' = e^z$

$\Rightarrow \tilde{L}y = \theta$ má řešení $y_{\lambda_j,k}$ i v $\mathbb{C}$!

$\Rightarrow$ Předp. kořen $\lambda = \alpha + i\beta$ s násobností m. Potom $\ell(\lambda)$ má i kořen $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ s násobností m

Ke kořenu λ existuje m LN řešení ve tvaru

$$y_{\lambda,j}(x) = x^j e^{\lambda x} = x^j e^{(\alpha+i\beta)x} = x^j e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} =$$

$$= x^j e^{\alpha x} \left(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)\right)$$

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

Stejně k $\bar{\lambda}$ ex. m LN řeš. $\quad y_{\bar{\lambda},j} = x^j e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right)$

$\forall j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$

Sestavíme funkce

$$y_{\lambda,1,j}(x) = \frac{y_{\lambda,j}(x) + y_{\bar{\lambda},j}(x)}{2} = x^j e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$y_{\lambda,2,j}(x) = \frac{y_{\lambda,j}(x) - y_{\bar{\lambda},j}(x)}{2i} = x^j e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

$\in \mathbb{R}$ pro $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ nahrazením $y_{\lambda,j}$ a $y_{\bar{\lambda},j}$ funkcemi $y_{\lambda,1,j}$ a $y_{\lambda,2,j}$

v souboru $\left(y_{\lambda_1,0}, \ldots, y_{\lambda_1,m_1}, y_{\lambda_2,0}, \ldots, y_{\lambda_2,m_2}, \ldots, y_{\lambda_M,1}, \ldots, y_{\lambda_M,m_M}\right)$

dostáváme <u>REÁLNÝ FS</u> rovnice $L_y = 0$.

<u>POZN</u> : $\quad y_{\lambda,j} = y_{\lambda,1,j} + i\, y_{\lambda,2,j} \qquad$ (rovnost funkcí)

$$\Rightarrow 0 = L(y_{\lambda,j}) = L(y_{\lambda,1,j}) + iL(y_{\lambda,2,j})$$

$$0 = L(y_{\bar{\lambda},j}) = L(y_{\lambda,1,j}) - iL(y_{\lambda,2,j})$$

soustava 2 lin. rovnic

$\Downarrow$

$L(y_{\lambda,1,j}) = 0$

$L(y_{\lambda,2,j}) = 0$

Př

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 = (\lambda+1)(\lambda+2) \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

$\Rightarrow FS = (y_1, y_2)$ kde $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{-2x}$

formálně nesprávné

$$FS = (e^{-x}, e^{-2x})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_0 = [y_1, y_2]_\lambda = \underbrace{[e^{-x}, e^{-2x}]_\lambda}_{\text{nesprávné}}$$

$\Leftrightarrow \left(y \in \mathcal{L}_0 \Leftrightarrow y = Cy_1 + Dy_2 \quad \text{kde } C, D \in \mathbb{R} \right)$

$\Leftrightarrow$ $y(x)$ řeší $Ly = 0$ $\Leftrightarrow$ $y(x) = Ce^{-x} + De^{-2x}$

$I = \mathbb{R}$

Př

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$ ... 2-násobný reálný kořen $\lambda_{1,2} = 2$ $(m = 2)$

$$\Rightarrow FS = (e^{2x}, xe^{2x})$$

$$\Rightarrow y(x) = Ce^{2x} + Dxe^{2x}$$

Př

$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^4 + 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 1)$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i \qquad \lambda_{3,4} = \pm i$$

$\lambda = \alpha + i\beta$ $\qquad$ $\alpha = 0, \beta = 2$ $\qquad$ $\alpha = 0, \beta = 1$

$$FS_{\mathbb{C}} = \left(\underbrace{e^{2ix}, e^{-2ix}}, \underbrace{e^{ix}, e^{-ix}} \right)$$

$$FS_{\mathbb{R}} = \left(\overbrace{\cos(2x), \sin(2x)}, \overbrace{\cos(x), \sin(x)} \right)$$

$$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + C\cos(x) + D\sin(x) \qquad I = \mathbb{R}$$

Př.

$$y''' - 2y'' + 5y' = 0$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 5) \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2i = \alpha \pm \beta i$$

$$\Rightarrow FS_{\mathbb{C}} = \left(1, e^{(1+2i)x}, e^{(1-2i)x} \right)$$

y_{λ_1} kde $y_{\lambda_1}(x) = e^{0 \cdot x} = 1$

$$\Rightarrow FS_{\mathbb{R}} = \left(1, e^x\cos(2x), e^x\sin(2x) \right)$$

$$\Rightarrow y(x) = C + De^x\cos(2x) + Ee^x\sin(2x) \qquad I = \mathbb{R}$$

Př.

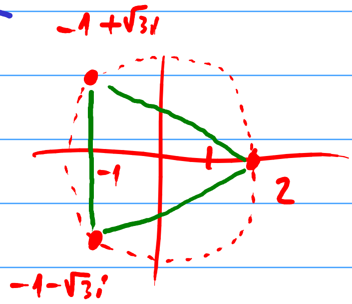
$$y''' - 8y = 0$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 8 \overset{!}{=} 0$$

hned vidíme $\lambda_1 = 2$

$$\begin{array}{l} (\lambda^3 - 8) : (\lambda - 2) = \lambda^2 + 2\lambda + 4 \\ \underline{-\lambda^3 + 2\lambda^2} \\ \quad 2\lambda^2 - 8 \\ \underline{\; -(2\lambda^2 - 4\lambda)} \\ \qquad 4\lambda - 8 \end{array}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \underline{\underline{-1 \pm \sqrt{3}\, i}}$$



POZN: $\lambda^3 = 8$ je binom. rovnice $\lambda^n = w$

$$FS_{\mathbb{C}} = \left(e^{2x},\ e^{(-1+\sqrt{3}i)x},\ e^{(-1-\sqrt{3}i)x}\right)$$

$$FS_{\mathbb{R}} = \left(e^{2x},\ e^{-x}\cos(\sqrt{3}x),\ e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)\right)$$

$y(x) = \ldots\ldots$ (DÚ) $\qquad I = \mathbb{R}$

DÚ $\quad y^{(4)} - 8y''' + 42y'' - 104y' + 169y = 0$

$$\ell(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 42\lambda^2 - 104\lambda + 169 = (\lambda^2 - 4\lambda + 13)^2$$

odpověda

Př $\quad y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

$$\ell(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 \overset{!}{=} 0$$

školní příklad: $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0 \quad a_k \in \mathbb{Z}$

předp. $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$ tak, že

$$\underbrace{a_0}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\lambda_0}_{\in \mathbb{Z}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k \lambda_0^{k-1}}_{\in \mathbb{Z}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_0^k = 0$$

$\Rightarrow \lambda_0$ musí být dělitelem a_0

$\Rightarrow$ uhodneme $\lambda_1 = 2$

+ vydělíme $\ell(\lambda) : (\lambda - 2)$

$\Rightarrow$

$$\ell(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

$\lambda_1 = 2$ je 3-nás. kořen

$\Rightarrow FS = (e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x})$

$\Rightarrow y(x) = \dots$ $\qquad I = \mathbb{R}$

Řešení LDR n-tého řádu s PRAVOU STRANOU (METODA VARIACE KONSTANT)

- Wronského determinant funkcí $f_1, \dots, f_n \in C^{(n-1)}((a,b))$

$$\underbrace{W_{f_1,\dots f_n}}_{\text{wronskián}}(x) = \underbrace{\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}_{\text{Wronského matice}}$$

- jestliže $f_1, \dots, f_n$ jsou LZ na I $\Rightarrow W_{f_1 \dots f_n}(x) = 0 \ \forall x \in I$

  tj. $(\exists x_0 \in I)(W_{f_1 \dots f_n}(x_0) \neq 0) \Rightarrow f_1, \dots f_n$ jsou LN na I.

- (VĚTA) n LN řešení $Ly = 0$ $(y_1, \dots, y_n)$ je FS na I

  $\Rightarrow (\forall x \in I)(W_{y_1 \dots y_n}(x) \neq 0)$ tj. Wronského matice je regulární

METODA VARIACE KONST

- $Ly = q$ (není "n") $\qquad Ly = \underline{y^{(n)}} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k y^{(k)}$

- známe FS : $(y_1, \dots, y_n)$

- víme, že $Ly = 0$ má řeš. ve tvaru $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$

- předpokládejme existenci řešení $Ly = \underline{q}$

ve tvaru $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k\underline{(x)} y_k(x)$

<u>dosadíme do $Ly = q$</u>

1. $$y' = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k' + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k}_{\overset{!}{=}0} \Rightarrow$$

2. $$\Rightarrow \quad y'' = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k'' + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k'}_{\overset{!}{=}0} \Rightarrow \quad \dots$$

$\vdots$

(n-1). $$\dots \Rightarrow \quad y^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n-1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-2)}}_{\overset{!}{=}0} \Rightarrow$$

n. $$\Rightarrow \quad y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k' y_k^{(n-1)}}_{\overset{!}{=}q}$$

$$\boxed{Ly = y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} p_j y^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(n)} + q + \sum_{j=0}^{n-1} p_j \sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(j)}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k \underbrace{\left(y_k^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} p_j y_k^{(j)} \right)}_{Ly_k = \theta} + q = \underline{\underline{q}}$$

Maticový zápis podmínek na $C_1', \dots, C_n'$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ & \vdots & & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{\text{regulární Wronského matice}} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 0 \\ q \end{pmatrix} \quad \text{vše v bodě } x$$

$\Rightarrow \exists$ jednoznačné řešení $C_1'(x) = \dots \qquad C_n'(x) = \dots$

a pak dostaneme $C_k(x) = \underbrace{\int C_k'(x)\,dx}_{\text{prim. fce k } C_k' = \tilde{C}_k(x)} + D_k$

$$\Rightarrow y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x) y_k(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} D_k y_k(x)}_{\in \Omega_0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \tilde{C}_k(x) y_k(x)}_{= y_p(x)}$$

Př.

$$1.\ y'' + 4y = \underbrace{\frac{1}{\cos(2x)}}_{=q(x)}$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 4 \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2i \qquad \Rightarrow FS = (\underbrace{\cos(2x)}_{y_1(x)}, \underbrace{\sin(2x)}_{y_2(x)})$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1(x)\cos(2x) + C_2(x)\sin(2x)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(2x)} \end{pmatrix}$$

řešení Cramerovým pravidlem : $A\vec{x} = \vec{b}$

$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$ kde $\Delta = \det A$

$\Delta_k = \det$ matice, která vznikla z A nahrazením k-tého sl. pravou stranou $\vec{b}$

$$\Delta = W_{y_1,y_2}(x) = 2 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin(2x) \\ \frac{1}{\cos(2x)} & 2\cos(2x) \end{vmatrix} = -\operatorname{tg}(2x)$$

$$\Rightarrow C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x)$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \int -\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x)\,dx = \frac{1}{4}\ln|\cos(2x)| + D_1$$

$t = \cos(2x)$

$dt = -2\sin(2x)\,dx$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos(2x) & 0 \\ -2\sin(2x) & \frac{1}{\cos(2x)} \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}x + D_2$$

$$\Rightarrow y(x) = \underbrace{D_1\cos(2x) + D_2\sin(2x)}_{\in \Omega_0} + \underbrace{\frac{1}{4}\ln|\cos(2x)|\cdot\cos(2x) + \frac{1}{2}x\sin(2x)}_{y_p(x)}$$

$$I_k = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) + k\frac{\pi}{2}$$
$$k \in \mathbb{Z}$$

Př

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$$ není ve tvaru $Ly = g$ (je to $\tilde{L}y = \tilde{g}$)

víme $FS = (x, e^x)$

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x-1 \quad \underline{g(x)}\,!$$ přitom $x \neq 1$ (alespoň zatím)

$$y(x) = C_1(x)x + C_2(x)e^x$$

a řešíme $$\begin{pmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x-1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = W_{y_1,y_2}(x) = (x-1)e^x$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ x-1 & e^x \end{vmatrix} = (x-1)e^x \quad .. \quad C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1 \quad .. \quad C_1 = x + D_1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = x(x-1) \quad ... \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = xe^{-x} \quad ... \quad C_2 = (1+x)e^{-x} + D_2$$

$$\Rightarrow \; y(x) = \underbrace{D_1 x + D_2 e^x}_{\in \Omega_0} + \underbrace{x^2+1+x}_{y_p(x)} = \tilde{D}_1 x + D_2 e^x + \underbrace{x^2+1}_{\tilde{y}_p(x)}$$

$\tilde{D}_1 \overset{!}{=} D_1 + 1$

$I = \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ přitom původní (nevydělené) rovnice má toto řeš. i pro $x=1$!

Př

$$xy'' + 2y' + xy = x \quad \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad y'' + \frac{2}{x}y' + y = 1$$

$1 = q(x)$!!

1) hledáme FS

subst. $y(x) = u(x)v(x)$ kde v nechodneme

u … nová prom.

$$x(u''v + 2u'v' + uv'') + 2(u'v + uv') + xuv = 0$$

$$\underbrace{xv}_{\overset{!}{=}0}\cdot u'' + \underbrace{(2xv' + 2v)}_{\text{co kdyby } \overset{!}{=}0}u' + \underbrace{(xv'' + 2v' + xv)}_{\tilde{L}v \overset{!}{=} 0}u = 0 \qquad (*)$$

$xv \overset{!}{=} 0$: nemá smysl $\Leftrightarrow y(x) = 0$

$\tilde{L}v \overset{!}{=} 0$: neumím (snížení řádu)

$$2xv' + 2v = 0$$

$$xv' + v = 0$$

$$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x| + c$$

$c = 0$ … stačí jediné řeš.

stačí volit $v = \frac{1}{x}$

Zkusíme dosadit $v = \frac{1}{x}$ do $(*)$: $\quad u'' + u = 0$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \;..\; \lambda = \pm i$$

$FS_{\mathbb{R}, u} = (\cos x, \sin x)$ … $FS_y = \left(\frac{\cos x}{x}, \frac{\sin x}{x}\right)$ $\Rightarrow$ variace konst. **DÚ**

Př – Dn

$$y'' - 2y' + y = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$$

Řešení: Platí $\ell(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2$. Proto FS $= \{e^x, xe^x\}$. Předpokládejme

$$y(x) = C_1(x)\,e^x + C_2(x)\,xe^x.$$

Platí

$$\Delta = W_{e^x, xe^x} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)\,e^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

a

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{x^2+2x+2}{x^3} & (x+1)\,e^x \end{vmatrix} = -\frac{x^2+2x+2}{x^2}e^x \implies C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{x^2+2x+2}{x^2}e^{-x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{x^2+2x+2}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{x^2+2x+2}{x^3}e^x \implies C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{x^2+2x+2}{x^3}e^{-x}.$$

Zintegrujeme C_1' a dostaneme

$$C_1 = \int -\frac{x^2+2x+2}{x^2}e^{-x}dx = -\int e^{-x}dx - 2\left[\int \frac{1}{x}e^{-x}dx + \underbrace{\int \frac{1}{x^2}e^{-x}dx}_{\substack{\text{provedeme per partes jen zde,}\\ \text{zbylé integrály se odečtou}}}\right]$$

$$= e^{-x} + \frac{2}{x}e^{-x} + C.$$

Podobně pro C_2 máme

$$C_2 = \int \frac{x^2+2x+2}{x^3}e^{-x}dx = \int \frac{1}{x}e^{-x}dx + 2\int \frac{1}{x^2}e^{-x}dx + 2\underbrace{\int \frac{1}{x^3}e^{-x}dx}_{\substack{\text{provedeme per partes jen zde,}\\ \text{zbydou integrály, vyznačené v hranaté závorce u } C_1}}$$

$$= -\frac{1}{x}e^{-x} - \frac{1}{x^2}e^{-x} + D.$$

Dosadíme a vyjde

$$y(x) = Ce^x + Dxe^x + \frac{1}{x}.$$

$I = (-\infty, 0)$ nebo $I = (0, +\infty)$.

DÚ $y'' - 4y' + 4y = 6xe^{2x}$

POZN! LDR s konst. koef. a spec. tvarem pravé strany

DÚ $y'' + y = \operatorname{tg}(x)$

$$y(x) = C\cos x + D\sin x + \cos x \cdot \ln\left|\frac{1-\sin x}{\cos x}\right|.$$

Je nutné věnovat pozornost definičnímu oboru.

DÚ $y''' - 4y'' + 5y' - 2y + \underbrace{8e^x}_{-q(x)} = 0$

- Při hledání kořenů $\ell(\lambda)$ se uplatní hádání celočíselných kořenů. Vyjde FS $= \left\{e^x, xe^x, e^{2x}\right\}$.
- Wronskián vyjde
$$W_{e^x, xe^x, e^{2x}}(x) = e^{4x}.$$
- Celkové řešení je
$$y(x) = Ce^x + Dxe^x + Ee^{2x} + 4x^2e^x.$$

3.5.2021

LDR s konst. koef. a speciálním tvarem pravé strany

Nechť

$$\tilde{L}y = \underbrace{e^{\beta x}\left(P_1(x)\cos(\gamma x) + P_2(x)\sin(\gamma x)\right)}_{\tilde{q}(x)}$$

je LDR s konstantními koeficienty, kde P_1, P_2 jsou polynomy stupně nejvýše r. Nechť číslo $\beta + \gamma i$ je k-násobným kořenem charakteristického polynomu $\ell(\lambda)$. Potom existuje partikulární řešení této rovnice ve tvaru

$$y_p(x) = x^k e^{\beta x}\left(Q_1(x)\cos(\gamma x) + Q_2(x)\sin(\gamma x)\right)$$

kde Q_1, Q_2 jsou polynomy stupně nejvýše r.

POZN:
- $\gamma = 0 \Rightarrow \tilde{q}(x) = P_1(x)e^{\beta x}$
- $\beta = \gamma = 0 \Rightarrow \tilde{q}(x) = P_1(x)$
- $\beta + i\gamma$ není kořenem $\ell(\lambda) \Leftrightarrow$ je 0-násobný koř. $\Leftrightarrow k = 0$

Př

$$y'' - y = \underbrace{x^2 - x + 1}_{P_1(x)} \qquad (\beta = \gamma = 0) \qquad \text{st } P_1 = 2$$

$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1 \qquad FS = (e^x, e^{-x})$

$\beta + i\gamma = 0$ není koř. $\ell(\lambda) \Rightarrow k = 0$

víme: $y(x) = Ce^x + De^{-x} + y_p(x)$

$y_p(x) = \varphi_1(x) = ax^2 + bx + c$ a, b, c neznáme!

kde st $\varphi_1 \leq 2$

DOSADÍME: $\Rightarrow y_p''(x) = 2a$

$$2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 - x + 1$$

porovnání koef. u :

x^2 : $-a = 1$ $\Rightarrow$ $a = -1$

x^1 : $-b = -1$ $\Rightarrow$ $b = 1$

x^0 : $2a - c = 1$ $\Rightarrow$ $c = -3$

$$\Rightarrow \; y(x) = Ce^{x} + De^{-x} + \underbrace{\left(-x^2 + x - 3\right)}_{y_p(x)} \qquad I = \mathbb{R}$$

DÚ $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$	$y'' - y = x^3$

Př $y'' - 2y' + y = 4e^{x}$

$q(x) = P_1(x)\, e^{x}$

st $P_1 = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$

$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$ $\qquad FS = \left(e^{x},\, xe^{x} \right)$

$\beta + i\gamma = 1$ je 2-násobný kořen $\ell(\lambda)$

$\Rightarrow k = 2$

$Q_2(x)$ polynom st. 0

Leibniz. vzorec

$\Rightarrow y_p(x) = x^2\, a \cdot e^{x} = x(\dots)$

$y_p'(x) = x(\dots)$

$y_p''(x) = 2ae^{x} + x(\dots)$

Po dosazení $2ae^{x} + x \cdot \underbrace{(\dots + \dots + \dots)}_{\text{vím} = 0} = 4e^{x}$ $\Rightarrow$ $a = 2$

$$\Rightarrow \; y(x) = Ce^{x} + Dxe^{x} + 2x^2e^{x} \qquad = y_p(x) \qquad I = \mathbb{R}$$

Dú $\quad y'' - 4y' + 4y = 6xe^{2x}$ $\qquad P_1(x) = 6x$, st $P_1 = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$

$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$

$FS = (e^{2x}, xe^{2x})$

β je 2-násobný kořen $\ell(\lambda)$

$\Rightarrow k = 2$

$$\Rightarrow y_p(x) = x^2(ax+b)e^{2x}$$
$$= (ax^3 + bx^2)e^{2x}$$

$\Rightarrow$ a, b najdeme dosazením a srovnáním koef. u mocnin x^0 a x^1 (x^2, x^3 vyjdou s koef 0 nezávisle na a, b)

$\Rightarrow$ dlouhé zderivovat $y_p(x)$ a dosadit

prozradím: $\quad a = 1$

$\qquad\qquad\qquad b = 0$

$$\Rightarrow y(x) = Ce^{2x} + Dxe^{2x} + \underbrace{x^3e^{2x}}_{y_p(x)}$$

Př $\quad y''' + 2y'' + y' = 36e^{2x}$ $\qquad$ st $P_1 = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$

s poč. podm. $\quad y(0) = 4$

$\qquad\qquad\qquad y'(0) = 4$

$\qquad\qquad\qquad y''(0) = 8$

$\beta + i\gamma$ není kořen $\ell(\lambda)$

$\Rightarrow k = 0$

$\ell(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda+1)^2$ $\qquad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = -1$

$\Rightarrow FS = (1, e^{-x}, xe^{-x})$

$$\Rightarrow y_p(x) = ae^{2x} \qquad \text{zderivujeme, dosadíme}$$

$$ae^{2x}(8 + 2\cdot 4 + 2) = 36e^{2x}$$
$$18ae^{2x} = 36e^{2x} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = C + De^{-x} + Exe^{-x} + 2e^{2x}}$$

Budeme dosazovat poč. podm.: v bodě $x=0$

$$\begin{aligned} y(x) &= C + De^{-x} + Exe^{-x} + 2e^{2x} \\ y'(x) &= -De^{-x} + E(1-x)e^{-x} + 4e^{2x} \\ y''(x) &= De^{-x} + E(x-2)e^{-x} + 8e^{2x} \end{aligned} \qquad \left| \qquad \begin{aligned} C + D \quad + 2 &\overset{!}{=} 4 \\ -D + E + 4 &\overset{!}{=} 4 \\ D - 2E + 8 &\overset{!}{=} 8 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow (C, D, E) = (2, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = 2 + 2e^{2x}}} \qquad I = \mathbb{R}$$

Př

$$y'' - 3y' = \underbrace{e^{3x}}_{q_1(x)} + \underbrace{- 18x}_{q_2(x)}$$

$$\begin{aligned} Ly_1 &= q_1 \\ Ly_2 &= q_2 \\ \hline L(y_1+y_2) &= q_1+q_2 \end{aligned} \qquad \text{„superpozice"}$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda \qquad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$$

$$FS = (1, e^{3x})$$

$$q_1: \quad y_{p_1}(x) = xae^{3x} \qquad \left\{ \begin{aligned} y_{p_1}'(x) &= ae^{3x} + x\cdot(\dots) \\ y_{p_1}''(x) &= 6ae^{3x} + x\cdot(\dots) \end{aligned} \right.$$

$P_1 = 1 \quad \text{st}\,P_1 = 0 \quad \beta = 3, \text{ je ко}, k = 1$

$$(6a-3a)\,e^{3x} = e^{3x} \quad\Rightarrow\quad 3a=1 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{1}{3}$$

$$y_{p1}(x) = \frac{1}{3}\,x e^{3x}$$

q_2: $$y_{p2}(x) = x^1\cdot(ax+b) = ax^2+bx \qquad \begin{cases} y'_{p2}(x) = 2ax+b \\ y''_{p2}(x) = 2a \end{cases}$$

st $P_1=1$ $\beta,\gamma=0$, $k=1$

dosadíme: $$2a - 3(2ax+b) = -18x$$

$$\begin{aligned} x^1&: \ -6a = -18 \\ x^0&: \ 2a-3b = 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} a&=3 \\ b&=2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ y_{p2}(x) = x(3x+2) = 3x^2+2x$$

$$\Rightarrow\ y(x) = \underbrace{C + De^{3x}}_{\in S_0} + \underbrace{\frac{1}{3}xe^{3x}}_{=y_{p1}(x)} + \underbrace{3x^2+2x}_{=y_{p2}(x)} \qquad I=\mathbb{R}$$

Dú $$y''' - 3y' - 2y = 6e^{-x} - 4xe^{x}$$

$\vdots$

$$y(x) = Ce^{-x} + Dxe^{-x} + Ee^{2x} - x^2e^{-x} + xe^{x}$$

Př $$y'' - 2y' + 10y = 18e^{x}\sin(3x)$$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 10 \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$$

$$FS = (e^{x}\cos(3x),\ e^{x}\sin(3x))$$

st $P_1=0$ $P_2=0$
$\beta=1$, $\gamma=3$, $k=1$

$Q_1(x)$ $\quad$ $Q_2(x)$ $\quad$ st Q_1, st $Q_2 = 0$

$$y_p(x) = xe^x\left(a\cos(3x) + b\sin(3x)\right) = x\cdot(\cdots)$$

$$y_p'(x) = e^x\left(a\cos(3x) + b\sin(3x)\right) + x\cdot(\cdots)$$

$$y_p''(x) = 2e^x\left((a+3b)\cos(3x) + (b-3a)\sin(3x)\right) + x\cdot(\cdots)$$

po dosazení vykrácení e^x a srovnání koef.
u $\cos(3x)$ a $\sin(3x)$

$$\begin{aligned} \cos(3x):&\quad 2(a+3b) - 2a = 0 &\Rightarrow\quad & b = 0 \\ \sin(3x):&\quad 2(b-3a) - 2b = 18 &\Rightarrow\quad & a = -3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad y(x) = Ce^x\cos(3x) + De^x\sin(3x) \underbrace{- 3xe^x\cos(3x)}_{y_p(x)} \qquad I = \mathbb{R}$$

D4 $\qquad y'' - y = 2\sin x - 4\cos x$

Př $\qquad y'' + y = 4x\cos x \qquad$ st $P_1 = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $k = 1$

$$\ell(\lambda) = \lambda^2 + 1 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2} = \pm i \qquad FS = (\cos x, \sin x)$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x\left((ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right) \\ &= (ax^2+bx)\cos x + (cx^2+dx)\sin x \end{aligned}$$

$$y_p''(x) = (2a + 4cx + 2d - bx)\cos x + (2c - 4ax - 2b - dx)\sin x$$

dosadíme a porovnáme koef. u:

I.	$\sin x$	$2c-2b$	$=0$
II.	$\cos x$	$2a+2d$	$=0$
III.	$x\sin x$	$-4a-d-d$	$=0$
IV.	$x\cos x$	$4c-b+b$	$=4$

$\left.\begin{matrix} \text{II} \\ \text{III} \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=d=0$

$\text{II}+\text{III} \Rightarrow a=d=0$

$\text{I}+\text{IV} \Rightarrow c=b=1$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = C\cos x + D\sin x + 2x\cos x + 2x^2\sin x} \qquad I=\mathbb{R}$$

SYSTÉMY LINEÁRNÍCH DIF. ROVNIC

- $\vec{y}\,' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$

  $\vec{y} : (a,b) \to \mathbb{R}^n$
  $A \in C((a,b))^{n\times n}$

  resp. $\underbrace{\vec{y}\,' - A(x)\vec{y}}_{L\vec{y}} = \vec{b}(x)$

  $L\vec{y}$ ... lin. dif. operátor

- soubor vektorových fcí $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ je LZ na intervalu I

  $\Leftrightarrow (\exists \underbrace{\mu_1, \dots, \mu_n}_{\text{netriv}})(\forall x \in I)\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{f}_i(x) = \vec{0}\right)$

  $\sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{f}_i = \vec{\theta}$ na I

- $(\vec{f}_1, \dots \vec{f}_n)$ je LN na I $\Leftrightarrow$ není LZ

- Wronského determinant:

  $$W_{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n}(x) = \left| \vec{f}_1(x) \dots \vec{f}_n(x) \right|$$

- VĚTA: $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ je LZ na I $\Rightarrow$ $W_{\vec{f}_1 \dots \vec{f}_n}(x) = 0$ $\forall x \in I$

- n LN řešení rovnice (soustavy n rovnic) $L\vec{y} = \vec{0}$ (ozn. $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$) nazýváme FUND. SYSTÉM

- VĚTA: $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ je FS na I $\Rightarrow$ $W_{\vec{y}_1 \dots \vec{y}_n}(x) \neq 0$ $\forall x \in I$

- VĚTA: Nechť $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ je FS $L\vec{y} = 0$. Pak každé řešení této rovnice má tvar

$$\vec{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \vec{y}_k(x)$$

kde $C_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, \dots, n\}$,

SYSTÉMY LINEÁRNÍCH DIF. ROVNIC S KONST. KOEF.

- $L\vec{y} = \vec{b}(x)$ kde $L\vec{y} = \vec{y}\,' - \mathbb{A}\vec{y}$

a $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$

- Předp. řešení ve tvaru: $\underline{\vec{y}(x) = \vec{v} e^{\lambda x}}$, $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$

$$L\vec{y} = \vec{y}\,' - \mathbb{A}\vec{y} = \lambda e^{\lambda x} \vec{v} - e^{\lambda x} \mathbb{A}\vec{v} = 0$$
$$e^{\lambda x} (\lambda \vec{v} - \mathbb{A}\vec{v}) = 0$$

tj. $\vec{v}$ je vlastní vektor matice $\mathbb{A}$ příslušný $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$.

tj. $\ell(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{I}) = 0$

- $\mathbb{A}$ je diagonaliz. $\Rightarrow$ najdeme n LN řešení daného tvaru $\Rightarrow$ máme FS

VĚTA: Nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ má algebraickou násobnost $k = \nu_a(\lambda)$. Potom existuje k LN řešení $L\vec{y} = \vec{0}$ ve tvaru

$$\vec{y}_j(x) = v_j(x) e^{\lambda x} \quad \forall j \in \hat{k} = \{1, \dots, k\}$$

kde složky vektoru $v_j(x)$ jsou polynomy st. nejvýše $j-1$.

$\Rightarrow$ **METODA NEURČITÝCH KOEFICIENTŮ**

Nechť $\vec{y} = \vec{v}(x) e^{\lambda x}$ kde $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$, $k = \nu_a(\lambda)$ a složky $\vec{v}$ jsou polynomy st. $(k-1)$

potom $\vec{v}(x) = \mathbb{B}\vec{x}$

$\mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n \times k}$, $\vec{x} = (1 \; x \; x^2 \; x^3 \dots x^{k-1})^T \in \mathbb{C}^{k \times 1}$

dosadíme do $L\vec{y} = \vec{0}$: $\vec{y}(x) = \mathbb{B}\vec{x}e^{\lambda x}$

$$\mathbb{B}\vec{x}' e^{\lambda x} + \lambda \mathbb{B}\vec{x} e^{\lambda x} - \mathbb{A}\mathbb{B}\vec{x} e^{\lambda x} = \vec{0} \quad \Big| \; e^{-\lambda x}$$

$\vec{x}' = (0 \; 1 \; 2x \; 3x^2 \dots (k-1)x^{k-2})^T$

$$\mathbb{B}\vec{x}' + (\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A})\mathbb{B}\vec{x} = \vec{0} \quad \dots \begin{cases} n \text{ rovnic} \\ \forall \vec{x} \in I \end{cases}$$

zde musí být n nulových polynomů pod sebou

$\Rightarrow$ soustava $\underline{k \cdot n}$ rovnic pro $\underline{k \cdot n}$ koeficientů u mocnin.

hodnost rovnice je právě $k(n-1)$, protože existuje k LN řešení.

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Co když $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$

$$\ell(\lambda)=0$$

K λ příslušní řešení $\vec{y}(x) = \vec{v}(x)\cdot e^{\lambda x}$

$$\overline{\vec{y}}(x) = \overline{\vec{v}}(x)\cdot \overline{e^{\lambda x}} = \overline{\vec{v}}(x)\, e^{\bar{\lambda} x}$$

$$e^{\lambda x} = e^{ax+ibx} = e^{ax}(\cos(bx)+i\sin(bx))$$
$$e^{\bar{\lambda} x} = e^{ax-ibx} = e^{ax}(\cos(bx)-i\sin(bx)) = \overline{e^{\lambda x}}$$

a navíc $L\vec{y}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{0} = \overline{L\vec{y}} = \overline{(\vec{y}\,' - A\vec{y})} = \overline{\vec{y}}\,' - A\overline{\vec{y}} = L\overline{\vec{y}}$$

$\Rightarrow$ máme: $\mathrm{Re}\,\vec{y}$, $\mathrm{Im}\,\vec{y}$ jsou 2 LN řešení

Metoda variace konstant

$(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ je FS $L\vec{y}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ předp., že řešení

rovnice $L\vec{y}=\vec{b}(x)$ je tvaru $\vec{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\vec{y}_k(x)$

Dosadíme:

$$L\vec{y} = \vec{y}\,' - A(x)\vec{y} = \sum_{k=1}^{n} C_k'\vec{y}_k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k\vec{y}_k\,' - \sum_{k=1}^{n} C_k A\vec{y}_k}_{\sum C_k(\underbrace{\vec{y}_k\,' - A\vec{y}_k}_{L\vec{y}_k = \vec{0}})} \overset{!}{=} \vec{b}(x)$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\vec{y}_k(x) = \vec{b}(x)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{y}_1 & \cdots & \vec{y}_n \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Wronského matice} \\ \text{(regulární)}}} \begin{pmatrix} C_1' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \vec{b} \qquad \Rightarrow \quad C_k(x) = \int C_k'(x)\,dx + D_k$$

Př

$$\underbrace{\begin{matrix} y' \\ z' \end{matrix}}_{\vec{y}\,'} \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} -5y + 2z \\ y - 6z \end{matrix}}_{A\vec{y}\,'} \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 40e^{x} \\ 9e^{-x} \end{matrix}}_{\vec{b}} \qquad \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

hledáme FS: $\ell(\lambda) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 2 \\ 1 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 11\lambda + 28 \overset{!}{=} 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{11\cdot 11 - 4\cdot 28}}{2} = \frac{-11 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} -7 \\ -4 \end{matrix} \right.$$

2 různé vl. čísla a $k_a(\lambda) = 1$

$\Rightarrow$ nemusíme používat metodu neurč. koef.

- $\lambda_1 = -7$: $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ - & - \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

- $\lambda_2 = -4$ $\quad (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ - & - \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow FS = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7x}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4x} \right)$$

$\Rightarrow$ rovnice bez p. strany má řeš. $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7x} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4x}$

Řešení s pravou stranou – variace konst

$$\begin{pmatrix} e^{-7x} & 2e^{-4x} \\ -e^{-7x} & e^{-4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40e^{x} \\ 9e^{-x} \end{pmatrix}$$

použijeme Cramerovo pravidlo

$$\Delta = W_{\vec{y}_1, \vec{y}_2} = 3e^{-11x}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 40e^{x} & 2e^{-4x} \\ 9e^{-x} & e^{-4x} \end{vmatrix} = 40e^{-3x} - 18e^{-5x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-7x} & 40e^{x} \\ -e^{-7x} & 9e^{-x} \end{vmatrix} = 9e^{-8x} + 40e^{-6x}$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{40}{3}e^{8x} - 6e^{6x}, \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3e^{3x} + \frac{40}{3}e^{5x}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{5}{3}e^{8x} - e^{6x} + D_1, \quad C_2 = e^{3x} + \frac{8}{3}e^{5x} + D_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{3}e^{8x} - e^{6x} + D_1 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-7x} + \left(e^{3x} + \frac{8}{3}e^{5x} + D_2 \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4x}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = D_1 e^{-7x} + 2D_2 e^{-4x} + 7e^{x} + e^{-x}$$

$$z(x) = -D_1 e^{-7x} + D_2 e^{-4x} + e^{x} + 2e^{-x} \qquad I = \mathbb{R}$$

Př

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 5x - y - 4z \\ \dot{y}(t) &= -12x + 5y + 12z \\ \dot{z}(t) &= 10x - 3y - 9z \end{aligned} \qquad \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \vec{0}$$

$$\ell(\lambda) = \dots = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \qquad \lambda_3 = -1$$

- vlastní vektor k $\lambda_3 = -1$

$$\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -12 & 6 & 12 \\ 10 & \cancel{-3} & -8 \end{pmatrix} \to \vec{0} \sim \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \vec{y}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

- vlastní vektor(y)? k $\lambda_{1,2} = 1$

$$\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -12 & 4 & 12 \\ 10 & -3 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\to$ matice má hodnost 2
$\Rightarrow \exists 1$ LN vl. vektor.

$\Rightarrow$ použijeme metodu neurč. koef. (pro $\lambda_{1,2}=1$)

$$\vec{y}_{1,2} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \end{pmatrix} e^t \Rightarrow \vec{y}_{1,2}{}' = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 + b_3 t \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} e^t$$

dosadíme: $\vec{y}_{1,2}{}' - \mathbb{A}\vec{y}_{1,2} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cancel{e^t} \underbrace{- \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -12 & 4 & 12 \\ 10 & -3 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \end{pmatrix}}_{(\mathbb{I}-\mathbb{A})\vec{y}} \cancel{e^t} = 0 \quad \Big| \cdot e^{-t}$$

rovnice pro koef. u t^0 $\Rightarrow$

rovnice pro koef. u t^1 ve všech 3 rovnicích

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 3 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & -4 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 3 & 10 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 3 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1. \\ 2. + 3\times 1. \\ 2\times 3. - 5\times 1. \\ 4. \\ 5. + 3\times 4. \\ 2\times 6. - 5\times 4. \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 LN řešení:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}_{1,2} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \\ a_3 + b_3 t \end{pmatrix} e^t$$

$$\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad \vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 3 \\ t \end{pmatrix} e^t$$

a z dřívějška:

$$\vec{y}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{y}(t) = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + D\begin{pmatrix} 1+t \\ 3 \\ t \end{pmatrix} e^{t} + E\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= Ce^{t} + D(1+t)e^{t} + Ee^{-t} \\ y(t) &= 3De^{t} - 2Ee^{-t} \\ z(t) &= Ce^{t} + Dte^{t} + 2Ee^{-t} \end{aligned}$$

$$I = \mathbb{R}$$

Pr

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -y + z \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -x + z \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\ell(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+1)$$

např. rozvoj podle 3. sloupce

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$$

3 různá vl. č. $\Rightarrow$ ke každému právě 1 vl. vektor

Vl. vektory:

$$\lambda_1 = 1: \quad (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vím, že poslední řádek bude LZ (není nutné ani počítat)

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = i: \quad \begin{pmatrix} -i & -1 & 1 \\ 0 & -i & 1 \\ -1 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & i-1 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = -i = \overline{\lambda_2}$: vl. vektor musí vyjít komplexně sdružený: (A je reálná, tj.!)

$$A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \overline{A\vec{v}_2} \underbrace{=}_{A \text{ reálná}} A\overline{\vec{v}_2} = \overline{\lambda_2 \vec{v}_2} = \overline{\lambda_2}\,\overline{\vec{v}_2} = \lambda_3 \overline{\vec{v}_2}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$(*)\ e^{\overline{\lambda} t} = e^{(a-ib)t} = e^{at}e^{-ibt} = e^{at}(\cos(bt) - i\sin(bt)) = \overline{e^{\lambda t}}$$

Podobně jako u LDR n-tého řádu lze nakombinovat:

$$\vec{y}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\vec{v}_2, \quad \text{a platí taky...} \quad \vec{y}_3(t) = e^{\lambda_3 t}\vec{v}_3 = e^{\overline{\lambda_2} t}\,\overline{\vec{v}_2} \overset{(*)}{=} \overline{e^{\lambda_2 t}}\,\overline{\vec{v}_2} = \overline{\vec{y}_2(t)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(\vec{y}_2 + \vec{y}_3) = \operatorname{Re}\vec{y}_2 \quad \text{a} \quad \frac{1}{2i}(\vec{y}_2 - \vec{y}_3) = \operatorname{Im}\vec{y}_2$$

jsou též řešeními, a navíc jsou reálná

$$\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad \vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t)$$

$$\Rightarrow \vec{z}_2(t) = \operatorname{Re}\vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}_3(t) = \operatorname{Im}\vec{y}_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Reálný FS tvoří $(\vec{y}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3)$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x(t) &= + D(\cos t - \sin t) + E(\cos t + \sin t) \\ y(t) &= Ce^t + D\cos t + E\sin t \\ z(t) &= Ce^t - D\sin t + E\cos t \end{aligned}$$

Př - DÚ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y - 2z \quad - t + 2 \\ \dot{y} &= -x \quad + 1 \\ \dot{z} &= \underbrace{x + y - z}\quad \underbrace{- t + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \vec{b}(t)$$

prý vyjde !

$$\begin{aligned} x &= -Ce^t + D\cos t + E\sin t \\ y &= Ce^t - D\sin t + E\cos t + t \\ z &= D\cos t + E\sin t + 1 \end{aligned}$$