Meyerovská vlastnost cut & project množin

Ľubomíra Balková

Katedra matematiky, FJFI, České vysoké učení technické

Trojanova 13, Praha 2, 120 00

1 Úvod

Od doby, kdy byly objeveny kvazikrystaly, se jejich modelování stalo hlavní úlohou teoretického výzkumu tohoto tématu. Matematickým objektem reprezentujícím pozice atomů v látce je bodová množina $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, kterou na základě fyzikálních znalostí omezujeme dvěma jednoduchými vlastnostmi: diskrétností a homogenitou. Základním požadavkem kladeným na modely kvazikrystalů je splnění tzv. delonovské vlastnosti.

Definice 1.1. Množina $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá delonovská, pokud existují $r_1, r_2 > 0$ takové, že

1. Λ je stejnoměrně diskrétní : $|x - y| \geq r_1$ pro každé $x, y \in \Lambda,\ x \neq y$.
2. Λ je relativně hustá: $B(x, r_2) \cap \Lambda \neq \emptyset$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}^n$, kde $B(x, r_2)$ je n-rozměrná koule poloměru r_2 se středem v x.

Jednoduchým příkladem delonovské množiny je *mřížka*, tj. $\Lambda = \{\sum_{i-1}^n a_i x_i \mid a_i \in \mathbb{Z}\}$ pro libovolnou bázi $x_1, x_2, ..., x_n$ v $\mathbb{R}^n$. Mřížky jsou charakterizovány vlastností

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda,$$

která odpovídá translačním symetriím, a proto slouží jako model periodických krystalů.

Jako model kvazikrystalických látek navrhl Meyer [5] pojem zobecňující mřížky. Kvazikrystalem nazývá delonovskou množinu Λ vyhovující podmínce 'skoro-mřížky', tj.

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F \tag{1}$$

pro nějakou konečnou množinu F. Moody [6] nazval takové množiny 'meyerovské' a ukázal, že jsou to delonovské harmonické množiny. Lagarias [3] zavedl ekvivalentní definici meyerovské množiny, delonovská množina Λ je meyerovská, pokud $\Lambda - \Lambda$ je delonovská. Jednou z pěkných vlastností meyerovských množin je, že mají *konečnou lokální složitost*, tj. pro každé $\rho > 0$ existuje až na posunutí konečně mnoho 'konfigurací' formy $\Lambda \cap B(x, \rho)$, $x \in \Lambda$.

Bohatou třídu meyerovských množin tvoří *cut & project množiny*. Jejich důležitost byla zdůrazněna Kramerem [2].Cut & project množiny vznikají jako projekce vybraných bodů vícerozměrné mřížky do méněrozměrného 'fyzikálního prostoru'. Výběr bodů mřížky je určen 'akceptačním oknem' v nefyzikálním 'vnitřním prostoru'.

Definice cut & project množiny, která je uvedena níže, nepatří mezi nejobecnější (obecné definice viz. [5], [6]). V našich úvahách jsou oba prostory, fyzikální i vnitřní, eukleidovské. Patera v [7] ukazuje, jak najít mřížku a projekci k získání modelů kvazikrystalů s pětičetnou symetrií, které byly pozorovány v přírodě. Pro obecný úvod do problematiky kvazikrystalů odkazujeme na [9].

Definice 1.2. Nechť V_1, V_2 jsou netriviální podprostory $\mathbb{R}^n$ takové, že $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^n$, zúžení π_1 na mřížku $\mathbb{Z}^n$ je vzájemně jednoznačné a $\pi_2(\mathbb{Z}^n)$ je husté ve V_2, kde π_1, π_2 jsou projekce na V_1 podle V_2, resp. V_2 podle V_1. Nechť Ω je kompaktní množina s neprázdným vnitřkem Ω°. Množina

$$\Sigma(\Omega) := \{\pi_1(x) \mid x \in \mathbb{Z}^n, \pi_2(x) \in \Omega\}$$

se nazývá cut & project množina s akceptačním oknem Ω.

Meyer ukázal, že všechny cut & project množiny jsou delonovské a splňují podmínku (1) 'skoro-mřížek', tj. jsou to meyerovské množiny. Na druhou stranu ukázal, že delonovská množina Λ je meyerovská tehdy a jen tehdy, když existuje cut & project množina $\Sigma(\Omega)$ a konečná množina F takové, že $\Lambda \subset \Sigma(\Omega) + F$. Protože jsou všechny cut & project množiny meyerovské, mají konečnou lokální složitost. Navíc, pokud akceptační okno vyhovuje podmínce $\partial\Omega \cap \pi_2(\mathbb{Z}^n) = \emptyset$, cut & project množina je *repetitivní*, tj. každá 'konfigurace', které se vyskytuje v $\Sigma(\Omega)$, vyskytuje se nekonečně mnohokrát.

V tomto článku se soustředíme na meyerovskou vlastnost cut & project množin, především na mohutnost konečné množiny F splňující $\Sigma(\Omega) - \Sigma(\Omega) \subset \Sigma(\Omega) + F$ v závislosti na výběru akceptačního okna. V kapitole 2 ukážeme, že problém může být převeden na studium vlastnosti $\Omega - \Omega \subset \Omega + G$. Označíme $f(\Omega)$ mohutnost minimální množiny G a nazveme ji *meyerovské číslo* Ω. V kapitole 3 dokážeme, že meyerovské číslo je omezené na prostoru všech konvexních akceptačních oken Ω. V kapitole 4 ukážeme, že při vynechání podmínky konvexity přestane být funkce f omezená. V kapitole 5 nalezneme odhady univerzální horní meze meyerovského čísla v dvourozměrném prostoru. Pro speciální typy akceptačních oken určíme $f(\Omega)$, viz. kapitola 6.

2 Meyerovská vlastnost cut & project množin

Jak již bylo zmíněno, každá cut & project množina splňuje meyerovskou vlastnost, tj. je delonovská a platí

$$\Sigma(\Omega) - \Sigma(\Omega) \subset \Sigma(\Omega) + F \tag{2}$$

pro nějakou konečnou množinu F. Samozřejmě $F \subset \pi_1(\mathbb{Z}^n)$ a pro konečnou množinu $G := \pi_2\pi_1^{-1}(F)$ dostáváme

$$\Omega - \Omega \subset \Omega + G. \tag{3}$$

Obrácené tvrzení však není tak jednoduché. Máme-li $G \subset V_2$ vyhovující (3), není vždy možné najít F stejné mohutnosti tak, že je splněna inkluze (2), což plyne z faktu, že G nemusí být podmnožinou $\pi_2(\mathbb{Z}^n)$. Této překážce se můžeme vyhnout, pokud budeme studovat pokrytí diferenční množiny $\Omega - \Omega$ kopiemi vnitřku Ω°.

$$\Omega - \Omega \subset \Omega^\circ + G. \tag{4}$$

Najdeme-li takovou množinu G, pak díky faktu, že $\pi_2(\mathbb{Z}^n)$ je hustá ve V_2, můžeme jistě najít množinu $\tilde{G} \subset \pi_2(\mathbb{Z}^n)$ stejné mohutnosti jako G a splňující (3). Proto položíme-li $F := \pi_1\pi_2^{-1}(\tilde{G})$, platí inkluze (2) a navíc $|F| = |G|$. Pro kompaktní množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s neprázdným vnitřkem nás tedy zajímá mohutnost minimální množiny G vyhovující (4). Tato mohutnost je značena $f(\Omega)$ a nazývána *meyerovské číslo* množiny Ω. Formálně zapsáno

$$f(\Omega) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists G \subset \mathbb{R}^d, \text{ splňující } \overline{\Omega - \Omega} \subset \Omega^\circ + G \text{ a } |G| = k\}.$$

Hlavní výsledek této práce je zformulován v následující větě.

Věta 2.1. *Pro každou dimenzi $d \in \mathbb{N}$ existuje konstanta $K_d \in \mathbb{N}$ taková, že pro každou konvexní kompaktní množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ platí $f(\Omega) \le K_d$.*

3 Důkaz omezenosti funkce f

V této kapitole provedeme důkaz věty 2.1, která tvrdí, že funkce f je omezená na prostoru konvexních kompaktních množin s neprázdným vnitřkem v $\mathbb{R}^d$. Nejprve potřebujeme ukázat důležitou vlastnost funkce f, totiž že f je invariantní vůči afinním transformacím Ω. Tuto vlastnost formalizuje následující věta.

Věta 3.1. *Nechť $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ je afinní vzájemně jednoznačné zobrazení. Potom $f(A\Omega) = f(\Omega)$ pro každou kompaktní množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s neprázdným vnitřkem.*

Důkaz. Je zřejmé, že hodnota funkce f je nezávislá na posunutí Ω, protože $(\Omega+x)-(\Omega+x) = \Omega - \Omega$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Proto můžeme bez újmy na obecnosti omezit naše úvahy na regulární lineární zobrazení A. Pokud Ω splňuje vztah $\overline{\Omega - \Omega} \subset (a_1 + \Omega^\circ) \cup ... \cup (a_k + \Omega^\circ)$, potom

$$\overline{A\Omega - A\Omega} = A(\overline{\Omega - \Omega}) \subset (Aa_1 + A\Omega^\circ) \cup ... \cup (Aa_k + A\Omega^\circ) = (Aa_1 + (A\Omega)^\circ) \cup ... \cup (Aa_k + (A\Omega)^\circ),$$

kde jsme využili fakt, že pro regulární zobrazení A platí $A\Omega^\circ = (A\Omega)^\circ$ a $A\overline{\Omega} = \overline{A\Omega}$. Proto $f(A\Omega) \le f(\Omega)$. Protože toto platí pro libovolné A a libovolnou Ω, dostáváme zároveň $f(\Omega) = f(A^{-1}A\Omega) \le f(A\Omega)$, čímž je tvrzení věty dokázáno. $\square$

Pro důkaz věty 2.1 je stěžejní následující tvrzení z [4].

Věta 3.2. *(John) Ke každé konvexní kompaktní množině Ω s neprázdným vnitřkem v $\mathbb{R}^d$ existuje uzavřený elipsoid E takový, že $E + z \subset \Omega \subset dE + z$, kde $z \in \mathbb{R}^d$.*

Důsledek 3.3. *Nechť Ω je konvexní kompaktní množina s neprázdným vnitřkem v $\mathbb{R}^d$. Potom*

$$f(\Omega) \le \textit{počet kopií } B(0,1) \textit{ nutných k pokrytí } \overline{B(0,2d)}.$$

Důkaz. S využitím věty 3.2 víme, že existuje uzavřený elipsoid $E \subset \mathbb{R}^d$ takový, že $E + z \subset \Omega \subset dE + z$. Najdeme regulární afinní zobrazení A splňující $A(E + z) = \overline{B(0,1)}$ a $A(dE + z) = \overline{B(0,d)}$. Potom $B(0,1) \subset (A\Omega)^\circ \subset B(0,d)$. Pokud n je počet kopií $B(0,1)$ nutných k pokrytí $\overline{B(0,2d)}$, tj.

$$\overline{B(0,2d)} \subset (x_1 + B(0,1)) \cup ... \cup (x_n + B(0,1)),$$

pro nějaké $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^d$, potom

$$A\Omega - A\Omega \subset \overline{B(0,d) - B(0,d)} = \overline{B(0,2d)} \subset$$

$$\subset (x_1 + B(0,1)) \cup ... \cup (x_n + B(0,1)) \subset (x_1 + (A\Omega)^\circ) \cup ... \cup (x_n + (A\Omega)^\circ).$$

S využitím věty 3.1 dostáváme $f(\Omega) = f(A\Omega) \le n$, což jsme chtěli ověřit. $\square$

Důkaz věty 2.1. S odvoláním na důsledek 3.3 stačí ukázat, že pro každou dimenzi d je pro pokrytí $\overline{B(0,2d)}$ nutný jen konečný počet kopií $B(0,1) \subset \mathbb{R}^d$. Toto je zřejmé, neboť díky kompaktnosti množiny $\overline{B(0,2d)}$ je možné najít konečné podpokrytí k pokrytí

$$\overline{B(0,2d)} \subset \bigcup_{x \in \overline{B(0,2d)}} B(x,1).$$

Proto f je omezená na prostoru konvexních kompaktních množin s neprázdným vnitřkem v $\mathbb{R}^d$. $\square$

4 Neomezenost f na prostoru obecných kompaktních množin

Dosud jsme se zabývali pouze konvexními kompaktními množinami v $\mathbb{R}^d$. Stojíme tedy před přirozenou otázkou. Je funkce f omezená, pokud upustíme od požadavku, aby Ω byla konvexní? Odpověď je negativní.

Věta 4.1. *Existuje posloupnost $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompaktních množin v $\mathbb{R}^d$ s neprázdným vnitřkem taková, že $\lim_{n\to\infty} f(\Omega_n) = +\infty$.*

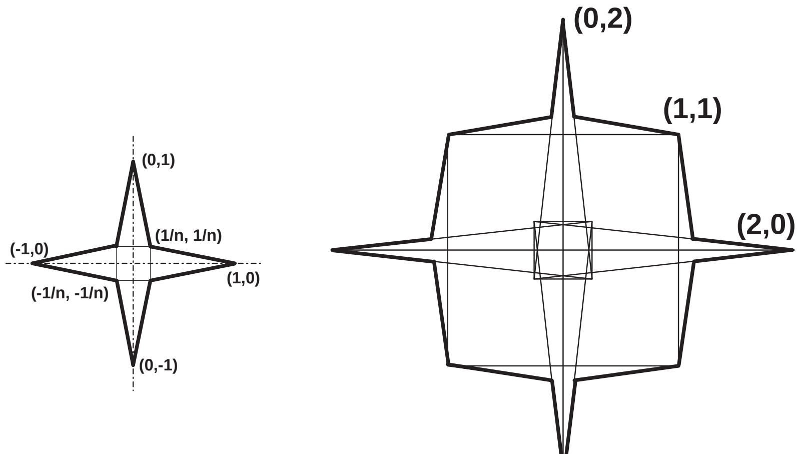
Důkaz. Zkonstruujeme protipříklad k omezenosti funkce f pro dimenzi $d = 2$. Zobecnění pro vyšší dimenze je přímé. Nechť Ω_n je kompaktní množina s neprázdným vnitřkem obsahující úsečky $\{(t, 0) \mid t \in [-1, 1]\}, \{(0, t) \mid t \in [-1, 1]\}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, navíc taková, že $\lim_{n\to\infty} \mathrm{vol}(\Omega_n) = 0$.

Potom zřejmě $\Omega_n - \Omega_n$ obsahuje čtverec se stranou délky 1 a se středem v počátku, $\{(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in [-1, 1]\}$. Pro obsah $\Omega_n - \Omega_n$ tedy máme $\mathrm{vol}(\Omega_n - \Omega_n) \geq 4$. Proto

$$f(\Omega_n) \geq \frac{\mathrm{vol}(\Omega_n - \Omega_n)}{\mathrm{vol}(\Omega_n)} \geq \frac{4}{\mathrm{vol}(\Omega_n)},$$

odtud plyne, že $\lim_{n\to\infty} f(\Omega_n) = +\infty$, což jsme měli ukázat. $\square$

Zkonstruovat výše uvedený protipříklad je možné dokonce pro hvězdicové množiny, které jsou v jistém smyslu nejbližším zobecněním konvexních množin. (Říkáme, že $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je hvězdicová, pokud existuje $x \in \Omega$ takové, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \Omega$ pro každé $y \in \Omega$ a pro každé $\lambda \in [0, 1]$.) Příklad posloupnosti hvězdicových množin splňujících $\lim_{n\to\infty} f(\Omega_n) = +\infty$ a odpovídající diferenční množinu $\Omega_n - \Omega_n$ vidíte na obrázku 1.



Obrázek 1: Ilustrace posloupnosti hvězdicových množin Ω_n, $n \in \mathbb{N}$, splňujících $\lim_{n\to\infty} f(\Omega_n) = +\infty$. Levá strana obrázku ukazuje Ω_n, na pravé straně je $\Omega_n - \Omega_n$.

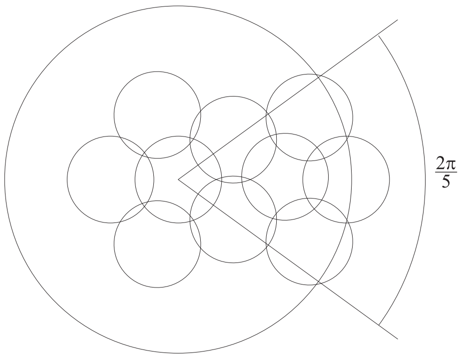
Všimněte si také, že jsme nediskutovali neomezenost funkce f na prostoru dimenze 1. V $\mathbb{R}^1$ je totiž každá hvězdicová množina konvexní. Protipříklad musí být proto zkonstruován na nesouvislých množinách. Konstrukce takové posloupnosti množin není složitá, ale technicky náročná, proto ji zde nebudeme uvádět.

5 Odhad mohutnosti F pro konvexní množiny v rovině

V této kapitole odhadneme hodnoty funkce f pro dvourozměrné konvexní kompaktní množiny Ω. Důsledek 3.3 nám poskytuje metodu, jak najít univerzální horní mez K_d na meyerovská čísla konvexních množin v $\mathbb{R}^d$. Pro případ $d = 2$ musíme určit počet kopií otevřeného jednotkového kruhu $B(0,1)$ nutných k pokrytí uzavřeného kruhu $\overline{B(0,4)}$. Výsledek je zformulován v následující větě.

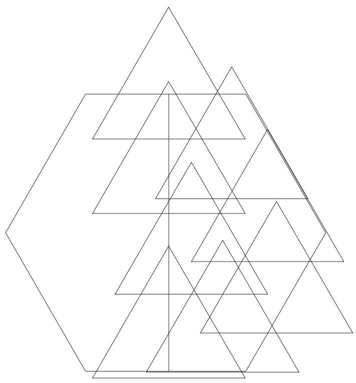
Věta 5.1. *Nechť Ω je konvexní kompaktní množina v $\mathbb{R}^2$. Potom $f(\Omega) \leq K_2 \leq 26$.*

Důkaz. Obrázek 2 ukazuje, že $\overline{B(0,4)}$ je možné pokrýt 26 kopiemi kruhu $B(0,1)$. Proto $f(\Omega) \leq 26$ pro každou konvexní kompaktní množinu Ω s neprázdným vnitřkem v $\mathbb{R}^2$. ☐



Obrázek 2: Ilustrace důkazu věty 5.1. K pokrytí střední části $\overline{B(0,4)}$ je užito 6 kopií jednotkového kruhu. Další 4 kopie jsou nutné k pokrytí kruhové výseče o úhlu $\frac{2\pi}{5}$.

Je pochopitelné, že výše získaný odhad univerzální horní meze funkce f na prostoru konvexních kompaktních množin v $\mathbb{R}^2$ je velmi hrubý. Domníváme se, že funkce f nabývá maxima na trojúhelníku.



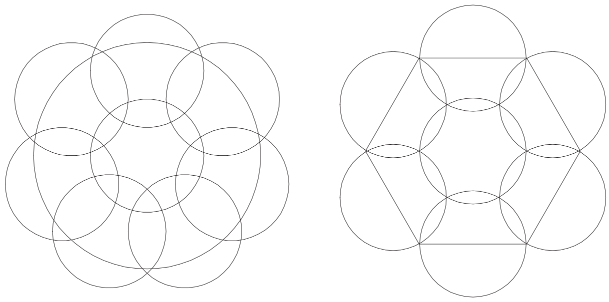
Obrázek 3: Nechť Ω je trojúhelník, potom $f(\Omega) \leq 13$.

Poznámka 5.2. Každý trojúhelník může být afinní transformací převeden na trojúhelník rovnostranný. Proto postačí zkoumat meyerovské číslo rovnostranného trojúhelníku. Když Ω je takový trojúhelník se stranou délky 1, potom $\Omega - \Omega$ je pravidelný šestiúhelník o poloměru 1.

Obrázek 3 ukazuje, že 13 otevřených kopií trojúhelníku Ω stačí k pokrytí uzavřeného šetiúhelníku $\Omega - \Omega$, tj. $f(\Omega) \leq 13$.

12 kopií trojúhelníku k pokrytí šestiúhelníku pravděpodobně nestačí, a proto $f(\Omega) = 13$. S ohledem na naše poznatky se zdá, že mezi všemi dvourozměrnými konvexními množinami má trojúhelník největší meyerovské číslo. Naopak $f(\Omega)$ je s největší pravděpodobností minimální pro elipsu.

Poznámka 5.3. Pro každou uzavřenou elipsu E v $\mathbb{R}^2$ existuje afinní zobrazení takové, že $A(E) = \overline{B(0,1)}$. S využitím věty 3.1 máme vztah $f(E) = f(A(E)) = f(\overline{B(0,1)})$. Obrázek 4 ilustruje určení hodnoty $f(\overline{B(0,1)}) = f(E) = 8$.



Obrázek 4: Levá část obrázku demonstruje, že 8 kopií jednotkového kruhu stačí k pokrytí $\overline{B(0,2)}$. Pravá část obrázku ilustruje, že 7 kopií nestačí, protože k pokrytí hranice $\overline{B(0,2)}$ je potřeba 6 uzavřených, a ne pouze otevřených kopií jednotkového kruhu.

Na základě předchozích úvah lze vyslovit hypotézu, že pro každou konvexní kompaktní množinu Ω v $\mathbb{R}^2$ platí $8 \leq f(\Omega) \leq 13$.

Samozřejmě lze předpokládat, že kladení dalších podmínek na konvexní kompaktní množinu Ω zpřesní odhad hodnoty f. Věnujme se tedy nyní případu středově symetrické množiny Ω. Pro tento účel využijeme další z Johnových výsledků [4].

Věta 5.4. *(John) Pro každou konvexní kompaktní středově symetrickou množinu Ω s neprázdným vnitřkem v $\mathbb{R}^d$ existuje uzavřený středově symetrický elipsoid E takový, že $E \subset \Omega \subset \sqrt{d}E$.*

V rovině má věta 5.4 následující důsledek. Jeho důkaz je analogický důkazu důsledku 3.3.

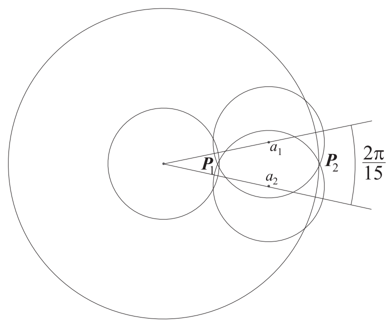
Důsledek 5.5. *Nechť Ω je konvexní kompaktní středově symetrická množina s neprázdným vnitřkem v $\mathbb{R}^2$. Potom*

$$f(\Omega) \leq \textit{počet kopií } B(0,1) \textit{ nutných k pokrytí } \overline{B(0,2\sqrt{2})}.$$

S využitím předchozího důsledku jsme schopni určit horní mez hodnot funkce f pro konvexní kompaktní středově symetrické množiny Ω s neprázdným vnitřkem v $\mathbb{R}^2$.

Věta 5.6. *Nechť Ω je konvexní kompaktní středově symetrická množina v $\mathbb{R}^2$ s neprázdným vnitřkem. Potom $f(\Omega) \leq 16$.*

Důkaz. S ohledem na důsledek 5.5 stačí ukázat, že 16 kopií otevřeného jednotkového kruhu stačí k pokrytí $\overline{B(0,2\sqrt{2})}$, viz. obrázek 5.6. Nechť a_1, a_2 jsou sousední vrcholy pravidelného 15-úhelníku se středem v 0 a poloměrem r. Technickými výpočty lze ukázat, že pro $r = 1.95$ jeden z průsečíků kruhů $B(a_1, 1)$ a $B(a_2, 1)$, na obrázku označený jako P_1, leží v kruhu $B(0, 1)$ a druhý průsečík, označený jako P_2, leží vně $\overline{B(0,2\sqrt{2})}$. Z toho vyplývá, že 15 jednotkových kruhů je třeba k pokrytí hranice $\overline{B(0,2\sqrt{2})}$ a další jednotkový kruh je nutný k pokrytí středu. ☐



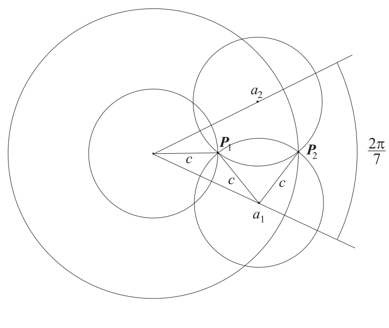
Obrázek 5: Ilustrace důkazu věty 5.6. Pro pokrytí hranice $\overline{B(0,2\sqrt{2})}$ stačí 15 kopií $B(0,1)$.

6 Meyerovská čísla pro pravidelné mnohoúhelníky

Je zajímavé určit hodnotu funkce f pro nejjednodušší dvoudimenzionální množiny, totiž mnohoúhelníky. Jako vedlejší výsledek odvodíme, že meyerovské číslo pro každou množinu, která není “daleko” kruhu, má hodnotu 8.

Lemma 6.1. *Nechť* $r > c := 2(1 + 2\cos\frac{2\pi}{7})^{-1}$. *Potom existují body* $a_1, ..., a_8$ *splňující*

$$\overline{B(0,2)} \subset B(a_1, r) \cup ... \cup B(a_8, r).$$



Obrázek 6: Pokrytí $\overline{B(0,2)}$ 8 kopiemi $\overline{B(0,c)}$, viz. lemma 6.1.

Důkaz. Pokrytí je ilustrováno na obrázku 6. Zřejmě stačí ukázat, že 8 uzavřených kopií $B(0,c)$ pokryje $\overline{B(0,2)}$. Položme $a_8 = 0$. Středy $a_1, ..., a_7$ ostatních kopií kruhu $B(0,c)$ jsou umístěny ve vrcholech pravidelného 7-úhelníku o poloměru $2c\cos\frac{\pi}{7}$. Algebraické výpočty ukazují, že hranice kruhů $B(a_1, c)$, $B(a_2, c)$, $B(0, c)$ se protínají v jediném bodě P_1, a hranice kruhů $B(a_1, c)$, $B(a_2, c)$, $B(0, 2)$ mají společný průsečík P_2. Tedy $\overline{B(0,2)} \subset \overline{B(a_1, c)} \cup ... \cup \overline{B(a_8, c)}$, čímž je lemma dokázáno. $\square$

Důsledek 6.2. *Nechť Ω je konvexní kompaktní množina v $\mathbb{R}^2$ taková, že existují $x, y \in \mathbb{R}^2$ a $r > 0$ splňující $\overline{B(x, cr)} \subset \Omega \subset \overline{B(y, r)}$, kde $c := 2(1 + 2\cos\frac{2\pi}{7})^{-1}$. Potom $f(\Omega) \leq 8$.*

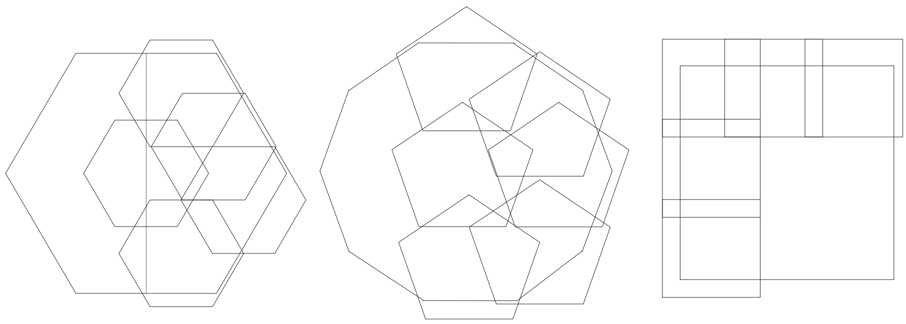
Předchozí důsledek může být jednoduše aplikován na pravidelné n-úhelníky pro $n \geq 7$. Zbývá určit hodnotu f pro pravidelný šestiúhelník, pětiúhelník a čtverec. Provedeme to konstruktivně.

Poznámka 6.3. Nechť Ω je pravidelný šestiúhelník, pětiúhelník nebo čtverec. Potom $f(\Omega) = 9$, jak je ilustrováno na obrázcích 7.

-Je-li Ω šestiúhelník o poloměru 1, potom $\Omega - \Omega$ je šestiúhelník o dvojnásobném poloměru. k pokrytí hranice uzavřeného šestiúhelníku o poloměru 2 potřebujeme 8 otevřených šestiúhelníků o poloměru 1, jeden otevřený šestiúhelník poloměru 1 je navíc nutný k pokrytí středu.

-Je-li Ω pětiúhelník o poloměru 1, potom $\Omega - \Omega$ je desetiúhelník o poloměru $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Platí stejné vysvětlení jako u šestiúhelníku.

-Je-li Ω čtverec o straně délky 1, potom $\Omega - \Omega$ je čtverec dvojnásobného rozměru. K pokrytí horní hrany čtverce o straně délky 2 potřebujeme 3 otevřené čtverce polovičního rozměru, stejně tak pro dolní hranu a střední část.



Obrázek 7: Pokrytí diferenční množiny $\Omega - \Omega$ 9 kopiemi Ω v případech, že Ω je pravidelný šestiúhelník, pětiúhelník nebo čtverec.

Výsledky pro pravidelné mnohoúhelníky jsou shrnuty v následující větě.

Věta 6.4. *Nechť Ω je pravidelný n-úhelník v $\mathbb{R}^2$. Potom $f(\Omega) \leq 8$ pro $n \geq 7$, $f(\Omega) = 9$ pro $n = 4, 5, 6$ a $f(\Omega) \leq 13$ pro $n = 3$.*

7 Závěr

V článku jsme určili univerzální horní mez $K_2 \leq 26$ meyerovského čísla pro konvexní kompaktní množiny v $\mathbb{R}^2$. K odhadu meze K_d v dimenzi $d \geq 3$ lze s odvoláním na důsledek 3.3 užít pokrytí koule $\overline{B(0, 2d)}$ jednotkovými otevřenými koulemi, což je složitý problém. Pro konvexní kompaktní $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ usuzujeme, že $8 \leq f(\Omega) \leq 13$. Pokud je navíc Ω středově symetrická, zdá se, že $8 \leq f(\Omega) \leq 9$. Bylo by zajímavé studovat topologické vlastnosti prostoru konvexních kompaktních středově symetrických Ω, pro které je $f(\Omega) = 8$, resp. $f(\Omega) = 9$, a především by bylo zajímavé popsat takové množiny Ω, které v Hausdorffově topologii tvoří hranice jednotlivých tříd s různými meyerovskými čísly. Funkce f určuje minimální počet otevřených kopií Ω° potřebných k pokrytí diferenční množiny $\Omega - \Omega$. Podobně se dá definovat funkce g jako minimální počet uzavřených kopií $\overline{\Omega}$ potřebných k pokrytí $\Omega - \Omega$. Samozřejmě platí $g(\Omega) \leq f(\Omega)$. Lze předpokládat, že množiny Ω, pro které $g(\Omega) < f(\Omega)$, leží přesně na hranici mezi třídami množin s rozdílnými hodnotami funkce f.

Literatura

[1] G.Beer, *Topologies on Closed and Closed Convex Sets*, Mathematics and its Applications **268**, Kluwer, Dordrecht, 1993

[2] P.Kramer and R.Neri, *On Periodic and Non-periodic Space Fillings of* $\mathbb{E}^m$ *Obtained by Projection*, Acta Cryst. A**40** (1984) 580-587

[3] J.Lagarias, *Geometric Models for Quasicrystals I. Delone Sets of Finite Type*, Discrete Comput. Geom. **21** (1999) 161-191

[4] C.G.Lekkerkerker, *Geometry of Numbers*, John Wiley & Sons, New York, 1969

[5] Y.Meyer, *Quasicrystals, Diophantine Approximations and Alegebraic Numbers*, Proc. Les Houches, March 1994, *Beyond Quasicrystals*, Les Editions de Physique, eds. F.Axel and D.Gratias, Springer, 1995, pp. 3-16

[6] R.V.Moody, *Meyer Sets and their Duals*, in *Mathematics of Long Range Aperiodic Order*, Proc. NATO ASI, Waterloo, 1996, ed. R.V.Moody, Kluwer (1996) 403-441

[7] J.Patera, *Noncrystallographic Root Systems and Quasicrystals*, in *Mathematics of Long Range Aperiodic Order*, Proc. NATO ASI, Waterloo, 1996, ed. R.V.Moody, Kluwer (1996) 443-465

[8] D.Shechtman, I.Blech, D.Gratias, J.W.Cahn, *Metallic Phase with Long Range Orientational Order and no Translational Symmetry*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984) 1951-1953

[9] M.Senechal, *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1995