PRAXE — Vzorové řešení 17. 2. 2014

1. (a) Lze skládat v pořadí $BA \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$. 10%

(b) 30%
$${}^{\mathcal{E}_4}(BA)^{\mathcal{E}_3} = {}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3}\,{}^{\mathcal{E}_4}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & (\alpha-\alpha^2) & 0 \\ -\alpha & -\alpha & (-\alpha-\alpha^2) & 0 \\ 1 & 1 & (1-\alpha) & 0 \end{pmatrix}$$

30%

$$h(BA) = h\left({}^{\mathcal{E}_4}(BA)^{\mathcal{E}_3}\right) = \begin{cases} 2 & \alpha \neq 0 \\ 1 & \alpha = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d(BA) = \dim \mathbb{R}^4 - h(BA) = \begin{cases} 2 & \alpha \neq 0 \\ 3 & \alpha = 0 \end{cases}$$

30%

$$\ker(BA) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (BA)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{cases} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda & \alpha \neq 0 \\[2ex] \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda & \alpha = 0 \end{cases}$$

Stačí ověřovat neprázdnost a uzavř. na operace, pak $V \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, tj. V je vekt. pr.

2. (a) V není vekt. prostor – není uzavřen na násobení číslem z $\mathbb{C}$, např. $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$, ale $\begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin V$ $(x_1^2 = -4)$ 25%

(b) V je vekt. prostor 25%
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$\dim V = 2$ báze $V = \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

(c) V není vekt. prostor – není uzavřen na násobení číslem z $\mathbb{C}$, např. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$, ale $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin V$ 25%

(d) V je vekt. prostor 25%
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$\dim V = 3$ báze $V = \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

(3.) (a) $Q = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$ $\quad P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_\lambda$ $\quad \dim P = 2 = \dim Q$

15%

LD se nemění vynásobením vektoru nenul. číslem a přičtením násobku jiného vektoru k vybranému vektoru

$P+Q: \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \left.\begin{matrix} \dim(P+Q) = 3 \\ P+Q \subset\subset \mathbb{C}^3 \end{matrix}\right\} P+Q = \mathbb{C}^3$

15%

báze např. standardní

$\dim(P \cap Q) = 2+2-3 = 1$

$\text{báze}(P \cap Q) = (\vec{q_1} - \vec{q_2}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

20%

(b) $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$

15% $Q = \ker \varphi = [\vec{x}, \vec{y}]_\lambda$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}$, $(\vec{y})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_\lambda$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$P+Q: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \dim(P+Q) = 3 \quad P+Q = \mathbb{C}^3$

15%

báze např. standardní

$\dim(P \cap Q) = 1$

$\text{báze}(P \cap Q) = (2\vec{q_1} - \vec{q_2}) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

20%

(4.) • $(x+2y)_{\mathcal{X}} = (x)_{\mathcal{X}} + \underbrace{2(y)_{\mathcal{X}}}_{\text{známe}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

1/3

$(x)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y_1 - 2y_2 - y_3 \Rightarrow (x)_{\mathcal{X}} = (y_1)_{\mathcal{X}} - 2(y_2)_{\mathcal{X}} - (y_3)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ✓

1/3 • $(x+2y)_{\mathcal{E}}$: $x + 2y = x_1 + 3x_2 \Rightarrow (x+2y)_{\mathcal{E}} = (x_1)_{\mathcal{E}} + 3(x_2)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ✓

1/3 • $(x+2y)_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+2y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 \Leftrightarrow (x+2y)_{\mathcal{X}} = \beta_1 (y_1)_{\mathcal{X}} + \beta_2 (y_2)_{\mathcal{X}} + \beta_3 (y_3)_{\mathcal{X}}$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ✓ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\quad \beta_3 = 1, \beta_2 = 2, \beta_1 = -2$

TEORIE   T značí čísel. těleso

1. (a) Nechť P, Q jsou vekt. pr. nad T, nechť $A: P \to Q$, A nazvu
40% izomorfní, pokud 1) A je lineární, tj: $(\forall \alpha \in T)(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)$

- $A(\alpha \vec{x}) = \alpha A\vec{x}$
- $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$

2) A je prosté, tj: $(\forall \vec{x}, \vec{y} \in P)(A\vec{x} = A\vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y})$

3) A je „na Q", tj: $(\forall \vec{y} \in Q)(\exists \vec{x} \in P)(A\vec{x} = \vec{y})$

Nechť P, Q jsou vekt. pr. nad T, pak P a Q jsou izomorfní (značíme $P \cong Q$), pokud existuje izomorfní zobr. $A: P \to Q$.

(b) Nechť P, Q jsou vekt. pr. nad T, $\dim P = \dim Q < +\infty$,
15% nechť $A: P \to Q$. Potom A je izomorfní $\Leftrightarrow$ A je monomorf. nebo A je epimorfní.

(c) Nechť P, Q jsou vekt. pr. nad T, kde dimenze alespoň
15% jednoho z nich je konečná. Potom $P \cong Q \Leftrightarrow \dim P = \dim Q$.

(d) i. $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ mají různé dim, podle věty z bodu (c) nejsou
30% izomorfní

ii. P_3 a $\mathbb{R}^3$ nejsou vekt. pr. nad stejným tělesem, nejsou izomorfní podle definice – ta vyžaduje stejné těleso

iii. $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^{2,2}$ jsou izomorfní – např. $(\cdot)_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}^4$ je izomorfní

souřadnicový izomorfismus v bázi $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, tj. $\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{pmatrix}$

2. (a) Nechť P, Q jsou vekt. pr. nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ (tj. A je lineární
15% zobr. $P \to Q$), potom hodností A je číslo $h(A) = \dim A(P)$.

$A(P) = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in P\}$.

(b) Nechť $A \in T^{m,n}$. Potom hodností A je číslo
15% $h(A) = \dim[A_{\cdot 1}, A_{\cdot 2}, \dots, A_{\cdot n}]_\lambda$, kde $A_{\cdot j}$ značí j-tý sloupec A.

(c) Nechť P, Q jsou vekt. pr. nad T, $\mathcal{X}$ báze P, $\mathcal{Y}$ báze Q,
10% $A \in \mathcal{L}(P,Q)$. Potom $h(A) = h({}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}})$.

2) (c) Nechť $A \in T^{m,n}$, $B \in T^{n,p}$. Potom platí:

30% 1) $h(A \cdot B) \leq \min\{h(A), h(B)\}$,

2) je-li A regulární, potom $h(A \cdot B) = h(B)$,

3) je-li B regulární, potom $h(A \cdot B) = h(A)$.

(d) Nechť P, Q, V jsou vekt. pr. nad T, $A \in \mathcal{L}(Q, V)$, $B \in \mathcal{L}(P, Q)$. Potom:

30% 1) $h(AB) \leq \min\{h(A), h(B)\}$,

2) je-li B „na Q", potom $h(AB) = h(A)$,

3) je-li A prosté, potom $h(AB) = h(B)$.

3) (a) Nechť $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ jsou vektory z vekt. pr. V nad T. Nazveme je

20% LZ, pokud ~~pouze~~ existuje jejich netriviální LK rovná $\vec{0}$, tj:

$(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in T)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x_i} = \vec{0} \wedge (\exists i_0 \in \hat{n})(\alpha_{i_0} \neq 0)\right)$.

(b) Nechť $\emptyset \neq M, N \subset V$ vekt. pr. nad T. Potom $M + N = \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in M, \vec{y} \in N\}$,

10% $M \cap N = \{\vec{x} \mid \vec{x} \in M \wedge \vec{x} \in N\}$.

(c) —"— Potom $M+N$ nazveme direktní, pokud $(\forall \vec{x} \in M+N)$

10% $(\exists_1 \vec{m} \in M)(\exists_1 \vec{n} \in N)(\vec{x} = \vec{m} + \vec{n})$.

(d) 20% i. chybí $A \in \mathcal{L}(P, Q)$ protipř.: $P = Q = \mathbb{R}^2$ $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$

20% ii. chybí nebo $\vec{x} = \alpha \vec{y}$ (na konci věty) protipř.: $\vec{x} = \vec{0}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$

20% iii. chybí $P, Q \subset\subset V$ protipř.: $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ $P = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $Q = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$,

$P+Q$ je direktní, ale $P \cap Q = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.