PRAXE

Vzorové řešení LA 14. 2. 2017

1. (a) $\dim V = 3 \Rightarrow$ stačí ověřit LN y $\Leftrightarrow$ odpovídá ověření LN $(\vec{y_1})_X, (\vec{y_2})_X, (\vec{y_3})_X$ $\quad y = (\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3})$

30%

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \alpha\\ \alpha & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & \alpha\\ 0 & \alpha-2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & \frac{\alpha}{3}\\ 0 & 0 & 1+(2-\alpha)\frac{\alpha}{3}\end{pmatrix}$$

LN $\Leftrightarrow$ $1+(2-\alpha)\frac{\alpha}{3} \neq 0$

$\alpha^2 - 2\alpha - 3 = (\alpha-3)(\alpha+1)$

LN $\Leftrightarrow$ $\alpha \in \mathbb{C} - \{-1, 3\}$

(b) i. pro $\alpha = 0$ je y báze $\Rightarrow$ úloha má smysl

60%

$${}^{y}A^{y} = \left((A\vec{y_1})_y \ (A\vec{y_2})_y \ (A\vec{y_3})_y\right)$$

$${}^{y}A^{y} = {}^{X}A^{y}\,{}^{y}I^{X} = {}^{X}I^{y}\,{}^{X}A^{X}\,{}^{y}I^{X} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} = *$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3}\end{array}\right)$$

$$* = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -3 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 6 & -3\\ 0 & 3 & 0\\ -3 & 9 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

(b) ii. pro $\alpha = 1$ není y báze $\Rightarrow$ úloha nemá smysl

10%

2. (a) 25% $h(\varphi) = h({}^{\mathcal{E}_3}\varphi^{X}) = 1$ ✓, $h(A) = h({}^{X}A^{y}) = 1$ ✓,

$\varphi A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$

$A\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$${}^{\mathcal{E}_1}(\varphi A) = {}^{\mathcal{E}_3}\varphi^{\mathcal{E}_1}\,{}^{\mathcal{E}_1}A^{\mathcal{E}_3} = (3\ 3\ 0)\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix} = (15) \qquad h(\varphi A) = 1 ✓$$

$$(A(3))_y = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} \Rightarrow (A(1))_y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix} \Rightarrow A(1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}$$

$${}^{\mathcal{E}_3}(A\varphi) = \begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}(3\ 3\ 0) = \begin{pmatrix}6 & 6 & 0\\ 9 & 9 & 0\\ -3 & -3 & 0\end{pmatrix} \qquad h(A\varphi) = 1 ✓$$

$d(\varphi) = \dim \mathbb{R}^3 - h(\varphi) = 2$ ✓

$d(A) = \dim \mathbb{R}^1 - h(A) = 0$ ✓

$d(\varphi A) = \dim \mathbb{R}^1 - h(\varphi A) = 0$ ✓

$d(A\varphi) = \dim \mathbb{R}^3 - h(A\varphi) = 2$ ✓

(b) 25% $\ker \varphi = \left[\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\right]_\lambda$ ✓ $(3\ 3\ 0)$

$\ker A = \{(0)\}$ ✓

$\ker(\varphi A) = \{(0)\}$ ✓

$\ker(A\varphi) = \left[\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\right]_\lambda$ ✓

2) c) (1) $\varphi A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1) \Rightarrow$ r-ce má smysl $\quad 15(x) = 6 \Rightarrow$ mn. všech řešení $= \left\{\left(\frac{6}{15}\right)\right\} = \left\{\left(\frac{2}{5}\right)\right\}$

25%

(2) $A\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \Rightarrow$ r-ce nemá smysl

d) (1) $(\varphi A)_{\mathcal{E}^\#} = ((\varphi A)(1)) = (15)$

25%

(2) $(A\varphi)_{\mathcal{E}^\#}$ nemá smysl, $A\varphi$ není lineární f-ionál, nezobrazuje do $\mathbb{R}$

3) báze $P = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right)$ $\quad \dim P = 3$

20%

10% $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\2&0&0\\0&6&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad \dim Q = 3 \quad$ báze $Q = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix} \right)$

10% $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&3\\0&-1&0\\-1&0&2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\quad \dim V = 3 \quad$ báze $V = \left(\begin{pmatrix}0\\3\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&1&1\\0&0&1&1&1&0\\0&2&0&2&0&0\\2&0&0&0&6&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&1&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\1&0&0&0&3&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&3&1\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&-2&2&-2&0\end{array}\right)$$

30%

$Q \subset P$, tj. $Q = P$

$P + Q = P \cap Q = P = Q$

$\Downarrow$

báze a dim jako P

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&0&0&1\\0&0&1&3&1&0\\0&2&0&0&0&-1\\2&0&0&2&-1&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&3&1&0\\0&0&-2&-1&\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-\frac{1}{2}&0\\0&1&0&0&0&-\frac{1}{2}\\0&0&1&3&1&0\\0&0&0&5&\frac{5}{2}&\frac{5}{2}\end{array}\right)$$

30%

$\dim(P+V) = 4 \Rightarrow P + V = \mathbb{R}^4$ báze např. standardní

$\dim(P+V) = 4$

$\dim(P \cap V) = 3 + 3 - 4 = 2$

báze $(P \cap V) = \left(\vec{v_1} - 2\vec{v_2}, \vec{v_2} - \vec{v_3}\right) = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} \right)$

③ (a) i: $\mathbb{X} \in [\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3]_\lambda$

10%

$$\left(\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & -i & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & i & -1 \\ 1 & -i & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & i & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & 0 & -1 & -1 & i & -1 \\ 0 & -i & 2 & 2 & -i & \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{array}\right)$$

$\mathbb{X} \notin [\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3]_\lambda$

nelze doplnit na bázi ✓

ii: LN $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{Z}$ jsou, musí být ověřeno

40% $\mathbb{Y}, \mathbb{Z} \in [\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3]_\lambda$

to platí $\dim [\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3]_\lambda = 2$

$\Downarrow$

báze $[\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \mathbb{X}_3]_\lambda =$

$(\mathbb{Y}, \mathbb{Z})$ ✓

(b) 10% nelze, jsou LZ ✓

(c) 40%

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & i & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & i & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

báze $\mathbb{C}^{2,2}$ je např.: $\left(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ✓

TEORIE T značí všude číselné těleso

① (a) Nechť P, Q jsou vekt. pr. nad T, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$ (tj. A je line-

20% ární: $P \to Q$), nechť $\emptyset \neq M \subset P$. Potom obraz M při zobrazení A je $A(M) = \{ A\vec{x} \mid \vec{x} \in M \}$.

(b) Nechť předpoklady jako v (a). Pokud $M \subset\subset P$, potom $A(M) \subset\subset Q$.

60% dk. $A(M) \neq \emptyset$ ($\vec{0}_P \in M$, protože $M \subset\subset P$, a proto $A\vec{0}_P = \vec{0}_Q \in A(M)$)

$A(M) \subset Q$ (plyne z definice $A(M)$)

uzavřenost: nechť $\vec{y_1}, \vec{y_2} \in A(M)$, $\alpha \in T$, potom $\exists \vec{x_1}, \vec{x_2} \in M$ tak, že $\vec{y_1} = A\vec{x_1}$, $\vec{y_2} = A\vec{x_2}$, odtud $\alpha\vec{y_1} + \vec{y_2} = \alpha A\vec{x_1} + A\vec{x_2} =$

$= A(\alpha\vec{x_1} + \vec{x_2}) \in A(M)$

$\uparrow$ linearita A $\quad \in M$, protože $M \subset\subset P$

(c) $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subset\subset \mathbb{R}^2$, ale $\varphi\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) = \{-1\} \not\subset\subset \mathbb{R}$, φ nesplňuje, že obraz

10% podprostoru je podprostor při zobrazení φ, tudíž nemůže být lineární

(d) $A(\mathbb{R}^2) \subset\subset \mathbb{R}^2$ podle (b), proto $\dim A(\mathbb{R}^2) \leq \dim \mathbb{R}^2 = 2$

10%

2. TEORIE

(a) Nechť P, Q jsou vekt. pr. nad T, $\mathcal{X} = (\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n})$ je báze P,
30% $(\vec{y_1}, \dots, \vec{y_m})$ je báze Q, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, potom matici A v bázích $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ nazveme ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} \in T^{m,n}$ definovanou $\forall i \in \hat{m}$ $\forall j \in \hat{n}$ $[{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}]_{ij} = y_i^{\#}(A\vec{x_j})$.

(b) Nechť předp. jako v (a), nechť $B \in \mathcal{L}(P,Q)$ a $\alpha \in T$.
20% Potom ${}^{\mathcal{X}}(A+B)^{\mathcal{Y}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} + {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$ a ${}^{\mathcal{X}}(\alpha A)^{\mathcal{Y}} = \alpha \cdot {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

(c) Nechť P, Q, V vekt. pr. nad T, nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ jsou báze
30% P, Q, V, nechť $A \in \mathcal{L}(Q,V)$, $B \in \mathcal{L}(P,Q)$. Potom ${}^{\mathcal{X}}(AB)^{\mathcal{Z}} = {}^{\mathcal{Y}}A^{\mathcal{Z}} \cdot {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}}$.

(d) Nechť P, Q vekt. pr. nad T, $\mathcal{X}$ a $\mathcal{U}$ jsou báze P, $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{V}$ jsou
20% báze Q, $A \in \mathcal{L}(P,Q)$, pak platí:

$${}^{\mathcal{U}}A^{\mathcal{V}} = {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{V}}\,{}^{\mathcal{U}}I^{\mathcal{X}} = {}^{\mathcal{Y}}I^{\mathcal{V}} \cdot \underbrace{{}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}}_{\text{známe}} \cdot {}^{\mathcal{U}}I^{\mathcal{X}}$$

matice přechodu snadno spočteme, známe-li báze $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$

3. (a) Nechť $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}$ jsou LN vektory ve vekt. pr. V nad T,
40% nechť $\vec{y_1}, \dots, \vec{y_m}$ jsou vektory z V a pro každé $i \in \hat{n}$ platí $\vec{x_i} \in [\vec{y_1}, \dots, \vec{y_m}]_\lambda$.

Potom: 1) $m \geq n$

2) $\exists$ vzájemně různé indexy $i_1, \dots, i_n \in \hat{m}$ tak, že $[\vec{y_1}, \dots, \vec{y_m}]_\lambda = [\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}, (\vec{y_i} \mid i \in \hat{m} - \{i_1, \dots, i_n\})]_\lambda$

(b) Nechť $\vec{x_1}, \dots, \vec{x_k}$ jsou LN vektory ve vekt. pr. V nad T, kde
20% $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Potom $\exists$ vektory $\vec{x}_{k+1}, \dots, \vec{x_n}$ tak, že $(\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n})$ je báze V.

(c) i. nepravda pro $V = [\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_{10}} \text{ ze standard. báze } \mathbb{R}^{10}}]_\lambda = \mathbb{R}^{10}$ máme 10 generátorů V
20%

ii. 20% nepravda pro V s nekonečnou dim (např. $V = P$) nelze LN vektory [illegible]