LAB2 cvičení – Metrická geometrie

Typy úloh:

1. Najít vzdálenost bodu a podprostoru.
2. Najít vzdálenost dvou variet.
3. Určit jaký úhel svírají dvě variety.

Př. 1 Nechť $\mathbb{R}^4$ je euklidovský prostor, nechť $P \subset \mathbb{R}^4$ a $\vec{a} \in \mathbb{R}^4$. Spočtěte $\rho(\vec{a}, P)$, pokud

$$P \equiv \begin{array}{r} x - 3y - 2z = 0 \\ -y + z + u = 0 \end{array} \qquad \text{a} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Př. 2 Nechť $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ jsou lineární variety v euklidovském $\mathbb{R}^3$. Určete $\rho(W_1, W_2)$, je-li

$$W_1 \equiv x + 5y + z = 3 \qquad \text{a} \qquad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Př. 3 V prostoru $\mathbb{R}^3$ se skalárním součinem $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 2u_2 v_2 + u_3 v_3$ pro každé $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{smallmatrix}\right), \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ je dána lineární varieta W a vektor $\vec{a}$. Určete $\rho(\vec{a}, W)$, je-li

$$W \equiv x + 2y - 3z = 2 \qquad \text{a} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Př. 4 Určete, jaký úhel svírají lineární variety W_1, W_2 v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li

$$W_1 \equiv \begin{array}{r} x + y + 3z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{array} \qquad \text{a} \qquad W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Př. 5 Nechť jsou dány lineární variety W_1, W_2 v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^2$,

$$W_1 \equiv x = 0 \qquad \text{a} \qquad W_2 \equiv 3x - 4y = -12.$$

Najděte všechny body variety W_1, které mají stejnou vzdálenost od bodu $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ a od variety W_2.

Řešení úloh

Př. 1 $\rho(\vec{a}, P) = \sqrt{22}$.

Př. 2 $\rho(W_1, W_2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Př. 3 $\rho(\vec{a}, W) = \frac{2}{\sqrt{19}}$.

Př. 4 $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.