LAB2 cvičení – Skalární součin a ortogonalita II

Typy úloh:

1. nalézt OG doplněk P do Q, kde $P \subset\subset Q$ a $Q \subset\subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$),
2. nalézt OG průmět vektoru.

Př. 1 Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Najděte bázi $Q^\perp$ do P, tj. bázi ortogonálního doplňku Q do P, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \quad \text{a} \quad Q = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Př. 2 Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Najděte bázi $Q^\perp$ do P, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \quad \text{a} \quad Q = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Př. 3 Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Najděte bázi $Q^\perp$ do P, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda \quad \text{a} \quad Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Př. 4 Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{R}^4$,

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \quad \text{a} \quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} \xi_1 - \xi_3 = 0 \\ \xi_2 - \xi_4 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Najděte

(a) OG doplněk Q do P (označme ho $Q^\perp_P$),

(b) $\vec{x}_{Q^\perp_P}$, tj. OG průmět vektoru $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ do $Q^\perp_P$.

Př. 5 Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Najděte

(a) ortonormální bázi P,

(b) $\vec{a}_P$ pro $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. OG průmět vektoru $\vec{a}$ do P.

Př. 6 Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$. Najděte (různými způsoby) $\vec{x}_P \in P$ a $\vec{x}_{P^\perp} \in P^\perp$ takové, že $\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_{P^\perp}$, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \quad \text{a} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Př. 7 Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$. Najděte $\vec{x}_P$, tj. ortogonální průmět $\vec{x}$ do P, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \quad \text{a} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Př. 8 Najděte ortogonální průmět $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ do $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, je-li

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} \middle| \xi_2 - \xi_3 = 0 \right\}.$$

Př. 9 Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^4$,

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Najděte

(a) $P^\perp$ do $\mathbb{C}^4$,

(b) ortogonální průmět vektoru $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, do P.

Řešení úloh

Př. 1 Vyhovuje např. báze $\left(\begin{pmatrix}2\\7\\5\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}74\\75\\61\\109\end{pmatrix}\right)$.

Př. 2 Vyhovuje např. báze $\left(\begin{pmatrix}4\\1\\-5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Př. 3 Vyhovuje např. báze $\left(\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10\\5\\5\\5\end{pmatrix}\right)$.

Př. 4 (a) $Q_P^\perp = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, (b) $\vec{x}_{Q_P^\perp} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Př. 5 (a) Vyhovyje např. báze $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-2\end{pmatrix}\right)$,

(b) $\vec{a}_P = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}4\\-4\\13\\-3\end{pmatrix}$.

Př. 6 $\vec{x}_P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\5\\5\\-13\end{pmatrix}$, $\vec{x}_{P^\perp} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}9\\-5\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

Př. 7 $\vec{x}_P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Př. 8 $\vec{x}_P = \begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}$.

Př. 9 (a) $P^\perp = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, (b) $\vec{x}_P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\3+\mathrm{i}\\3-\mathrm{i}\\0\end{pmatrix}$.