LAB2 cvičení – Skalární součin a ortogonalita

Typy úloh:

1. rozhodnout, zda je dané zobrazení skalárním součinem,
2. doplnit OG (ON) soubor na ON (OG) bázi celého $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$),
3. nalézt OG (ON) bázi $V \subset\subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) obsahující nějaké předepsané vektory z $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$),
4. nalézt OG doplněk $V \subset\subset \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) do $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

Př. 1 Na prostoru $\mathbb{R}^2$ definujeme zobrazení $\langle \vec{x} | \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1$, kde $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ a $\vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$. Je toto zobrazení skalárním součinem?

Př. 2 Na prostoru $\mathbb{R}^{m,n}$ definujeme zobrazení $\langle \mathbb{A} | \mathbb{B} \rangle = \mathrm{Tr}(\mathbb{A}^T \mathbb{B})$. Dokažte, že toto zobrazení je skalárním součinem.

Př. 3 V unitárním prostoru $\mathbb{C}^2$ najděte dvě různé ON báze.

Př. 4 Najděte ON bázi $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde $P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

Př. 5 Doplňte soubor $\left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ na ON bázi $\mathbb{R}^4$.

Př. 6 Najděte OG bázi podprostoru

$$V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} \right]_\lambda \subset\subset \mathbb{R}^4, \text{ která obsahuje vektor } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Př. 7 Najděte bázi $P^\perp \subset\subset \mathbb{R}^4$, je-li

(a) $P = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

(b) $P = \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

Př. 8 Je-li to možné, Doplňte vektor $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ na OG bázi prostorů

(a) $P = \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\2\\4\end{pmatrix}\right]_\lambda$,

(b) $Q = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-2\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Př. 9 Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $P = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$. Najděte $P^\perp$.

Př. 10 Najděte OG doplněk k $P = \left[\begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\3\\2\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Př. 11 Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $P = \left\{\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\\\xi_4\end{pmatrix} \,\middle|\, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0\right\}$.

Najděte

(a) $P^\perp$ do $\mathbb{R}^4$,

(b) ortonormální bázi P.

Řešení úloh

Př. 4 Vyhovuje např. báze $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Př. 5 Vyhovuje např. báze $\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Př. 6 Vyhovuje např. báze $\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\14\\-1\\18\end{pmatrix}\right)$.

Př. 7 (a) např. $\left(\begin{pmatrix}-17\\-10\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, (b) např. $\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Př. 8 (a) např. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

(b) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \neq Q$, tj. tento vektor není možné doplnit na bázi Q.

Př. 9 $P^{\perp} = \left[\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right]_{\lambda}$.

Př. 10 $P^{\perp} = \left[\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}\right]_{\lambda}$.

Př. 11 (a) $P^{\perp} = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_{\lambda}$

(b) Vyhovuje např. báze $\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$.