LAB2 cvičení – Hermitovské a kvadratické formy

Př. 1 Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ a $\vec{y} = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$ a nechť $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je definované $h(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{R}^2$.

Př. 2 Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ a nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^n$ je taková, že $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$. Nechť $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je definované $h(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T \mathbb{A} \vec{y}$. Dokažte, že h je hermitovská forma na $\mathbb{R}^n$.

Př. 3 Najděte poláru h, matici ve standardní bázi ${}^{\mathcal{E}}Q$, polární bázi, signaturu, charakter a nulprostor kvadratické formy Q (na $\mathbb{R}^3$), definované pro $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$

(a) $Q(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$,

(b) $Q(\vec{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2$,

(c) $Q(\vec{x}) = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3$,

(d) $Q(\vec{x}) = -x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

(e) $Q(\vec{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Př. 4 Nechť Q je kvadratická forma na V_3 nad $\mathbb{R}$, nechť $\mathcal{X}$ je báze V_3. Nejděte signaturu, polární bázi a nulprostor Q, určete charakter Q a určete, zda jde o regulární či singulární formu. Pro $\vec{x} \in V_3$, $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{smallmatrix}\right)$ definujeme

(a) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 + 4\alpha_3^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_2\alpha_3$,

(b) $Q(\vec{x}) = \alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + 4\alpha_1\alpha_2$.

Př. 5 Nechť Q je kvadratická forma na V_4 nad $\mathbb{R}^4$ a nechť $\mathcal{X}$ je báze V_4. Najděte polární bázi a nulprostor Q, je-li

$$
{}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}
$$

Př. 6 Nechť h je hermitovská forma na $\mathbb{R}^3$, která má ve standardní bázi tvar $h(\vec{x}, \vec{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$. Nechť Q je diagonála h. Najděte bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, aby

(a) ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, (b) ${}^{\mathcal{X}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Řešení úloh

Př. 3 (a) $h(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$

$$^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\operatorname{sg} Q = (2,1,0)$, Q je indefinitní, $N_h = \{\vec{0}\}$.

(b) $h(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$

$$^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\operatorname{sg} Q = (1,1,1)$, Q je indefinitní, $N_h = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

(c) $h(\vec{x},\vec{y}) = 9x_2y_2 + 9x_3y_2 + 6x_1y_2 + 6x_2y_1 + 6x_1y_3 + 6x_3y_1 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2$

$$^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\operatorname{sg} Q = (2,1,0)$, Q je indefinitní, $N_h = \{\vec{0}\}$.

(d) $h(\vec{x},\vec{y}) = -x_3y_3 - \frac{1}{2}x_1y_2 - \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_2$

$$^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\operatorname{sg} Q = (1,1,1)$, Q je indefinitní, $N_h = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

(e) $h(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$

$$^{\mathcal{E}}Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$\operatorname{sg} Q = (1,2,0)$, Q je indefinitní, $N_h = \{\vec{0}\}$.

Př. 4 (a) $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, kde $(\vec{a}_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\vec{a}_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\vec{a}_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{sg} Q = (2,1,0)$, Q je indefinitní a regulární, $N_h = \{\vec{0}\}$.

(b) $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$, kde $(\vec{a}_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\vec{a}_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\vec{a}_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\operatorname{sg} Q = (1,1,1)$, Q je indefinitní a singulární, $N_h = [\vec{a}_3]_\lambda$.

Př. 5 $\mathcal{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ a $N_h = [\vec{a}_3, \vec{a}_4]_\lambda$, kde

$$(\vec{a}_1)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{a}_2)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{a}_3)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (\vec{a}_4)_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Př. 6 (a) $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.

(b) Protože (a) má řešení, úloha (b) mít řešení nemůže: obě matice v zadání jsou diagonální a tedy hledaná báze $\mathcal{X}$ bude polární bází Q. Podle zákona setrvačnosti kvadratických forem nezáleží signatura Q na volbě polární báze. Matice v zadání (a) odpovídá signatuře $(3, 0, 0)$, matice v zadání (b) signatuře $(2, 0, 1)$. Řešení má tedy max jedna z úloh.