4. cvičení - Vlastní čísla a vlastní vektory matic

Základní úlohy:

- nalézt vlastní čísla a vlastní vektory matice
- rozhodnout, zda je daná matice diagonalizovatelná (případně v závislosti na parametru)
- pokud je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná, nalézt matici $\mathbb{X}$ takovou, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$
- ve speciálních jednoduchých případech rozhodnout, zda jsou dvě matice podobné

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A}$. Rozhodněte, zda $\mathbb{A}$ je diagonalizovatelná. Pokud je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná, najděte matici $\mathbb{X}$ takovou, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$.

   (a)
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{C}$, pro která je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná.
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Nalezněte všechna $\alpha \in \mathbb{R}$, pro která je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná (a navíc má všechna vlastní čísla reálná).

   (a)
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b)
   $$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

4. Zjistěte, zda $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ jsou podobné a v kladném případě nalezněte $\mathbb{X}$ tak, že $\mathbb{A} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{X}$.

5. Zjistěte, pro které hodnoty parametru β je diagonalizovatelná matice
   $$\begin{pmatrix} -11 & -8 & 4 \\ 12+\beta & 9+\beta & -3 \\ 2\beta & 2\beta & 3 \end{pmatrix}$$

6. Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je diagonalizovatelná matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1-\alpha \\ -\alpha & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

7. Je dána matice $\mathbb{A} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Najděte vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a k nim příslušné vlastní vektory.

   (b) Rozhodněte o diagonalizaci matice $\mathbb{A}$.

   (c) Najděte bázi $\mathbb{C}^3$ složenou z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$, existuje-li.

8. Je matice $\mathbb{A}$ podobná matici $\mathbb{B}$? Pokud ano, najděte matici podobnostní transformace.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

9. Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Najděte jejich vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

10. Je dána matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Najděte její vlastní čísla a k nim příslušné LN vlastní vektory.

11. Je matice $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná? Pokud ano, najdětě matice $\mathbb{X}$ a $\mathbb{D}$, kde $\mathbb{D}$ je diagonální a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$. $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Rozhodněte, pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je diagonalizovatelná matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix}$.

13. Jsou dány matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Je matice $\mathbb{A}$ podobná matici $\mathbb{B}$? Pokud ano, najděte podobnostní transformaci.

14. Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\mathbb{A}$ diagonalizovatelná? Pro taková α najděte regulární matici $\mathbb{X}$ a diagonální matici $\mathbb{D}$ tak, že $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{D}$.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

15. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Je podobná matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Pokud ano, najděte matici podobnostní transformace. Pokud ne, vysvětlete.

Výsledky: Vlastní čísla a vlastní vektory matic

1. Vlastní číslo 1 s vlastním vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, vlastní číslo 2 s vlastním vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vlastní číslo 3 s vlastním vektorem $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ je $\mathbb{X}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Není diagonalizovatelná. Jediné vlastní číslo je 2 s geometrickou násobností 2. Lineárně nezávislé vlastní vektory jsou např. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) $\alpha > 0$ (ovšem diagonalizovatelné pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -8$, pokud nepožadujeme, aby zároveň byla všechna vlastní čísla reálná)
   (b) diagonalizovatelné pro všechna $\alpha \in R$

4. $\mathbb{A} = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{B}\mathbb{X}$ pro $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\beta \neq -2$

6. $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$

7. (a) vlastní číslo 0 s $\nu_a(0) = 2$, s $\nu_g(0) = 1$ s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vlastní číslo $\frac{2}{3}$ s $\nu_a(\frac{2}{3}) = 1$, s $\nu_g(\frac{2}{3}) = 1$ s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   (b) matice není diagonalizovatelná
   (c) neexistuje

8. Jsou podobné. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -i & -1 & -i \\ i & 0 & i \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ je $\mathbb{X}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1-i & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & -1-i & -1 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$.

9. $\mathbb{A}$ má vlastní číslo 1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vlastní číslo -1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a vlastní číslo 2 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Matice $\mathbb{B}$ má vlastní čísla s opačnými znaménky a vlastní vektory stejné.

10. $\mathbb{A}$ má vlastní číslo 1 s LN vlastními vektory např. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a vlastní číslo -1 s LN

vlastními vektory např. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11. Je diagonalizovatelná. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je $\mathbb{X}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 3$

13. Jsou podobné. Označíme-li $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ je $\mathbb{X}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{B}$.

14. Je diagonalizovatelná pouze pro $\alpha = 0$ s např. $\mathbb{X} = \mathbb{I}$ a s $\mathbb{D}$ rovným nulové matici.

15. $\mathbb{A}$ má vlastní číslo 1 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a vlastní číslo 0 s vlastním vektorem např. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Přitom platí $\nu_a(1) = 1$, $\nu_g(1) = 1$ a $\nu_a(0) = 2$, $\nu_g(0) = 1$ Matice $\mathbb{A}$ tedy nemůže být podobná diagonální matici.