01LAL cv. 9 — Lineární funkcionál a lineární zobrazení

Potřebné pojmy z teorie: lineární zobrazení, jádro, hodnost a defekt lineárního zobrazení, 2. věta o dimenzi.

Př. 1 **[cvičení]** Nechť je definován funkcionál $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3$ následujícím způsobem

(a) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$,

(b) $\varphi(\vec{x}) = 0$,

(c) $\varphi(\vec{x}) = |x_1|$,

(d) $\varphi(\vec{x}) = \mathrm{Re}(x_1)$,

(e) $\varphi(\vec{x}) = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$, kde $(\vec{x})_{\mathcal{X}} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{smallmatrix}\right)$ a $\mathcal{X}$ je báze prostoru $\mathbb{C}^3$ definovaná následovně

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

(f) $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2\alpha_2 - x_2 + \alpha_3$ za stejných předpokladů jako v předchozím bodě.

Zjistěte, zda $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$. V kladném případě najděte hodnost $\mathrm{h}(\varphi)$, defekt $\mathrm{d}(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.

Př. 2 **[cvičení]** Nechť je definován funkcionál $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^\#$ pomocí obrazů bazických vektorů

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3, \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3, \quad \varphi \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6.$$

(a) Najděte explicitní předpis pro φ, tj. $\varphi \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = \cdots$

(b) Najděte hodnost $\mathrm{h}(\varphi)$, defekt $\mathrm{d}(\varphi)$ a bázi $\ker \varphi$.

Př. 3 **[cvičení]** Nechť je definováno zobrazení $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ následovně

(a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_3 - 3x_1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$,

(b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

(c) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - 2 \\ x_1 \end{pmatrix}$,

(d) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_3 + x_2 \\ 4x_3 + 2x_2 \end{pmatrix}$.

Zjistěte, zda $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. V pozitivním případě vyšetřete obor hodnot $A(\mathbb{R}^3)$, hodnost $\mathrm{h}(A)$, jádro $\ker A$ a defekt $\mathrm{d}(A)$. V negativním případě vysvětlete, proč A není lineární.

Př. 4 **[cvičení]** Nechť $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^3)^\#$, kde pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$ platí $\varphi_1(\vec{x}) = x_1$ a funkcionál φ_2 je zadaný pomocí obrazů bazických vektorů prostoru $\mathbb{R}^3$

$$\varphi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \qquad \varphi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \qquad \varphi_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Najděte bázi průniku jader funkcionálů φ_1 a φ_2, tj. $\varphi_1^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_2^{-1}(\{0\})$.

Př. 5 Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každý $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ platí $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Určete $\mathrm{h}(A)$, $\mathrm{d}(A)$.

(b) Doplňte $\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ na bázi $A(\mathbb{R}^2)$.

(c) Najděte bázi $\ker A$.

(d) Rozhodněte, zda je A izomorfismus. Vysvětlete.

Př. 6 Nechť je definováno zobrazení $A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ pro každé $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3$ následujícím způsobem

(a) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \mathrm{Im}(x_2 - x_3) \end{pmatrix}$, (b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_2 - \mathrm{i}x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$, (c) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - 2x_3^2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Zjistěte, zda $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$. V kladném případě najděte hodnost $\mathrm{h}(A)$, defekt $\mathrm{d}(A)$ a bázi $\ker A$.

Př. 7 Zjistěte, ve kterém případě $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$. Pokud není, vysvštlete proč. Pokud je, najděte $\mathrm{h}(A)$, $\mathrm{d}(A)$, $\ker A$. Pro každé $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ platí

(a) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, (b) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \mathrm{i}y \\ 0 \end{pmatrix}$, (c) $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ 1 \end{pmatrix}$.

Řešení úloh

Př. 1 (a) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}, \mathrm{h}(\varphi) = 1, \mathrm{d}(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right)$

(b) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}, \mathrm{h}(\varphi) = 0, \mathrm{d}(\varphi) = 3$, báze jádra je např. $\mathcal{E}_3$

(c) $\varphi \notin (\mathbb{C}^3)^{\#}$, např. protože φ není homogenní: $\varphi \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \neq (-1)\varphi \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$

(d) $\varphi \notin (\mathbb{C}^3)^{\#}$, např. protože φ není homogenní: $\varphi \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \neq \mathrm{i}\varphi \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$

(e) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$, $\mathrm{h}(\varphi) = 1$, $\mathrm{d}(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -7 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right)$

(f) $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$, $\mathrm{h}(\varphi) = 1$, $\mathrm{d}(\varphi) = 2$, báze jádra je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right)$

Př. 2 (a) $\varphi(\vec{x}) = -\frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 6x_3$,

(b) $\mathrm{h}(\varphi) = 1$, $\mathrm{d}(\varphi) = 2$, báze $\ker \varphi$ je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right)$.

Př. 3 (a) $A(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$, $\mathrm{h}(A) = 2$, $\mathrm{d}(A) = 1$, báze $\ker A$ je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \right)$,

(b) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, např. protože A není homogenní: $A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \neq (-1)A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$

(c) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, např. protože $A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$

(d) $A(\mathbb{R}^3) = [\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right)]_\lambda$, $\mathrm{h}(A) = 1$, $\mathrm{d}(A) = 2$, báze $\ker A$ je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right)$.

Př. 4 $\varphi_1^{-1}(\{0\}) \cap \varphi_2^{-1}(\{0\}) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right]_\lambda$.

Př. 5 (a) $\mathrm{h}(A) = 2$, $\mathrm{d}(A) = 0$.

(b) báze $A(\mathbb{R}^2)$ je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right)$.

(c) $\ker A = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)\}$, báze neexistuje.

(d) A je monomorfní (plyne z (b)), ale není epimorfní (z (c) vidíme, že $A(\mathbb{R}^2) \neq \mathbb{R}^3$).

Př. 6 (a) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$, např. protože A není homogenní: $A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \neq \mathrm{i}A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$

(b) $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$, $\mathrm{h}(A) = 2$, $\mathrm{d}(A) = 1$, báze $\ker A$ je např. $\left(\left(\begin{smallmatrix} -2-i \\ i \\ 2 \end{smallmatrix} \right) \right)$

(c) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$, např. protože A není homogenní: $A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) \neq (-1)A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$

Př. 7 (a) $\mathrm{h}(A) = 2$, $\mathrm{d}(A) = 0$, $\ker A = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)\}$

(b) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, např. protože $A(\mathbb{R}^2) \not\subset \mathbb{R}^3$

(c) $A \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, např. protože $A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$