01LAL cv. 8 — Podprostor (2. část)

Informace a pokyny:

1. Potřebné pojmy z teorie: podprostor vektorového prostoru, součet podprostorů $P+Q$, průnik podprostorů $P \cap Q$, první věta o dimenzi, doplněk podprostoru.

2. Je důležité všdět, že $P+Q$ a $P \cap Q$ jsou vektorové prostory, a tudíž má smysl hledat jejich bázi a dimenzi.

Př. 1 **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$, kde

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda \quad \text{a} \quad Q = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

(a) Najděte dimenzi a bázi proprostorů $P+Q$ a $P \cap Q$.

(b) Najděte doplněk $P+Q$ do $\mathbb{R}^4$.

Př. 2 **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$. Určete dimenzi, nalezněte bázi $P+Q$ a $P \cap Q$ a dále najděte doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$, je-li:

(a) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

(b) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

(c) $P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

(d) $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \right\}$, $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

(e) $P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \;\middle|\; x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \wedge 2x_1 - x_3 - 3x_4 = 0 \wedge x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\}$,
$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \;\middle|\; 3x_1 = 2x_2 \wedge x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$.

Př. 3 **[cvičení]** Nechť $M \subset \mathcal{P}_4$. Zjistěte, zda $M \subset\subset \mathcal{P}_4$, a v kladém případě určete $\dim M$ a najděte bázi M, je-li:

(a) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(1) = 0\}$,

(b) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(0) = 1\}$,

(c) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid \text{stupeň } x \text{ je 0 nebo 1 nebo 2}\}$,

(d) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid \forall t \in \langle 0, 1 \rangle \big(x(t) = x(1-t)\big)\}$,

(e) $M = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid \forall t \in \mathbb{R} \big(x(t) = x(1)\big)\}$,

(f) $M = \left\{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(1) - 2x(-1) = 0 \wedge x(0) + x(1) = 0\right\}$.

Př. 4 **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathcal{P}_4$, $Q \subset\subset \mathcal{P}_4$. Najděte doplňek P do $\mathcal{P}_4$ a doplněk Q do $\mathcal{P}_4$. Nalezněte dimenzi a bázi podprostorů $P, Q, P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \{x \in \mathcal{P}_4 \mid x(0) + x(1) = 0\} \quad \text{a} \quad Q = [a, b, c]_\lambda\,,$$

kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$a(t) = 1 - t - t^2, \quad b(t) = 1 + t + t^2, \quad c(t) = 2 + 2t.$$

Př. 5 **[cvičení]** Nechť $M \subset\subset \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ (tj. $\mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$),

$$M = \left[\begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\right]_\lambda.$$

(a) Vyberte bázi M z generátorů.

(b) Doplňte – je-li to možné – na bázi M následující vektory

(b1) $\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ (b2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$

Př. 6 Nechť $P = \left\{x \in \mathcal{P}_4 \;\middle|\; \forall t \in \mathbb{R}\big(x(t) = x(-t)\big)\right\}$ a $Q = \left\{x \in \mathcal{P}_4 \;\middle|\; \forall t \in (1,2)\big(x(t) = x(1-t)\big)\right\}$. Je-li $P \subset\subset \mathcal{P}_4$ a $Q \subset\subset \mathcal{P}_4$, najděte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P \cap Q$.

Př. 7 Nechť $P, Q \subset\subset \mathbb{C}^{2,2}$,

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right]_\lambda,$$

$$Q = \left\{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2} \;\middle|\; x_{11} + x_{22} = x_{12} + x_{21}\right\}.$$

(a) Najděte dimenzi a bázi $P, Q, P+Q$ a $P \cap Q$.

(b) Pro jaká $\alpha \in \mathbb{C}$ lze $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ doplnit na bázi $P \cap Q$? Pro taková α vektor na bázi doplňte.

(c) Najděte doplněk P do $\mathbb{C}^{2,2}$.

Řešení úloh

Př. 1 $\dim P+Q=4$, báze např. standardní,

$\dim P\cap Q=2$, báze např. $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Př. 2 (a) $P+Q=\mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní)
$P\cap Q=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ (dimenze je tedy 0 a báze neexistuje),

(b) $P+Q=\mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní)
$\dim(P\cap Q)=1$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right)$,

(c) $P+Q=Q$, $\dim Q=3$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&1\\3&1\end{pmatrix}\right)$,
$P\cap Q=P$, $\dim P=2$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\right)$,

(d) $P+Q=\mathbb{C}^{2,2}$ (dimenze je tedy 4 a báze např. standardní)
$\dim(P\cap Q)=2$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right)$,

(e) $\dim(P+Q)=3$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}3&-1\\3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\-3&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\0&-3\end{pmatrix}\right)$
$P\cap Q=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ (dimenze je tedy 0 a báze neexistuje).

Př. 3 (a) $\dim M=3$, báze M je např. $(e_1-e_2,e_1-e_3,e_1-e_4)$,

(b) M není podprostor $\mathcal{P}_4$, M neobsahuje nulový vektor a není uzavřený na operace,

(c) M není podprostor $\mathcal{P}_4$, M neobsahuje nulový vektor (nulový polynom nemá definovaný stupeň),

(d) $\dim M=2$, báze M je např. (e_1,e_2-e_3),

(e) $\dim M=1$, báze M je např. (e_1),

(f) $\dim M=2$, báze M je např. $(4e_1-e_2-7e_3,e_2-e_4)$.

Př. 4 Báze P je např. $(e_1-2e_4,e_1-2e_3,e_1-2e_2)$, báze Q je např. (a,b,c), $\dim(P+Q)=4$ a báze je např. standardní $\mathcal{E}_4$, $\dim(P\cap Q)=2$ a báze je např. $(e_1+e_2-3e_3,e_1-e_2-e_3)$, doplněk P je $[e_1]_\lambda$, doplněk Q je $[e_4]_\lambda$.

Př. 5 (a) Báze M je např. $\left(\begin{pmatrix}1+2\mathrm{i}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\2+\mathrm{i}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1+2\mathrm{i}\end{pmatrix}\right)$.

(b1) Báze M je např. $\left(\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\-\mathrm{i}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+2\mathrm{i}\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\2+\mathrm{i}\end{pmatrix}\right)$.

(b2) Nelze doplnit na bázi M, protože $\begin{pmatrix}1+\mathrm{i}\\1-\mathrm{i}\end{pmatrix}\notin M$.

Př. 6 Báze P je např. (e_1,e_3), báze Q je např. (e_1,e_2-e_3),
$\dim(P+Q)=3$ a báze je např. (e_1,e_2,e_3), $\dim(P\cap Q)=1$ a báze je např. (e_1).

Př. 7 (a) $\dim P = 3$, $\dim Q = 3$, $\dim P + Q = 4$, $\dim P \cap Q = 2$,

báze P je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right)$,

báze Q je např. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, báze $P + Q$ např. standardní,

báze $P \cap Q$ např. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right)$,

(b) $\alpha = 1$, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\right)$,

(c) $[\mathbb{E}_{1,1}]_\lambda$.