01LAL cv. 7 — Podprostor

Informace a pokyny:

1. Potřebné pojmy z teorie: podprostor vektorového prostoru, součet podprostorů $P+Q$, průnik podprostorů $P \cap Q$, první věta o dimenzi.
2. Je důležité vědět, že $P+Q$ a $P \cap Q$ jsou vektorové prostory, a tudíž má smysl hledat jejich bázi a dimenzi.

Př. 1 **[cvičení]** Zjistěte, zda množina $M \subset \mathbb{C}^3$ je podprostor $\mathbb{C}^3$, a pokud je, určete bázi a dimenzi M. (Využijte faktu, že dimenze vlastního podprostoru je menší než dimenze prostoru samého.)

(a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \forall j \in \{1,2,3\}(x_j \in \mathbb{Z}) \right\}$,

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$,

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 - x_3 = 0 \right\}$,

(d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \right\}$.

Př. 2 **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda \quad \text{a} \quad Q = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right]_\lambda .$$

Př. 3 **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathbb{C}^3$, $Q \subset\subset \mathbb{C}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$$

a

(a) $Q = \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_\lambda$,

(b) $Q = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_\lambda$.

Př. 4 **[cvičení]** Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \;\wedge\; 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \right\}$$

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -2x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \;\wedge\; 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \right\}.$$

Př. 5 Nechť $P, Q, V \subset\subset \mathbb{R}^3$. Nalezněte dimenzi a bázi $P \cap Q \cap V$, je-li

$$P = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_\lambda, \; Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right]_\lambda, \; V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Př. 6 Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi P, Q, $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\} \quad \text{a} \quad Q = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\lambda.$$

Př. 7 Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^3$, $P = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]_\lambda$, kde $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 5 \end{pmatrix}$. Nalezněte $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby $\dim P = 2$. Je-li Q podprostor $\mathbb{R}^3$, najděte bázi a dimenzi Q, $P+Q$ a $P \cap Q$ s užitím vypočtené hodnoty α. Není-li Q podprostor $\mathbb{R}^3$, vysvětlete proč ne.

(a) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 + x_2 = x_3 \right\}$,

(b) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 = 0 \right\}$,

(c) $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1^2 = x_3 \right\}$.

Př. 8 Nechť $P \subset\subset \mathbb{R}^4$, $Q \subset\subset \mathbb{R}^4$. Nalezněte dimenzi a bázi P, Q, $P+Q$ a $P \cap Q$, je-li Q nejmenší podprostor obsahující vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, kde

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{a} \quad P = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + 2x_2 = 0 \right\}.$$

Řešení úloh

Př. 1 (a) M není uzařená vůči násobení číslem z $\mathbb{C}$,

(b) M je podprostor dimenze 2, báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$,

(c) M je podprostor dimenze 1, báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$,

(d) M neobsahuje nulový vektor ani není uzavřená vůči operacím.

Př. 2 $\dim P + Q = 3, \dim P \cap Q = 1$, báze $P + Q$ je např.

$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right)$ nebo standardní $\mathbb{R}^3$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}\right)$.

Př. 3 (a) $\dim P + Q = 3, \dim P \cap Q = 1$,

báze $P + Q$ je např. $\mathcal{E}_3$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

(b) $\dim P + Q = \dim P \cap Q = \dim P = \dim Q = 2$, tj. $P + Q = P \cap Q = P = Q$,

báze je u všech těchto prostorů např. $\left(\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Př. 4 $\dim P + Q = 3, \dim P \cap Q = 1$,

báze $P + Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Př. 5 Platí $P \cap Q \cap V = P$, proto $\dim P \cap Q \cap V = 2$ a báze je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right)$.

Př. 6 $\dim P + Q = 4, \dim P \cap Q = 2$, báze $P + Q$ je např. $\mathcal{E}_4$,

báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Př. 7 $\dim P = 2$ pro $\alpha = 14$,

(a) $\dim P + Q = 3$, báze je např. $\mathcal{E}_3$, $\dim P \cap Q = 1$, báze $P \cap Q$ je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$,

(b) $\dim P + Q = 3$, báze je např. $\mathcal{E}_3$, $\dim P \cap Q = 0$, báze $P \cap Q$ neexistuje,

(c) $Q \not\subset\!\!\!\subset \mathbb{R}^3$, protože Q není uzavřeno vůči operacím.

Př. 8 $Q \subset P$, proto $P + Q = P$ a $P \cap Q = Q$, $\dim P = 3$, $\dim Q = 2$,

$$\text{báze } P \text{ je např. } \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \text{ báze } Q \text{ je např. } \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$