01LAL cv. 12 — Matice lineárního zobrazení (2. část)

Potřebné pojmy z teorie: matice lineárního zobrazení v bázích, věta o výpočtu obrazu vektoru pomocí matice v bázích, věta o matici složeného zobrazení, hodnost matice, věta o vztahu hodnosti zobrazení a hodnosti jeho matice v bázích.

Př. 1 **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^2)$ je takové, že

$$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Nalezněte

(a) bázi oboru hodnot a bázi jádra zobrazení A,

(b) hodnost $\mathrm{h}(A)$ a defekt $\mathrm{d}(A)$,

(c) všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Př. 2 **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^3)$ takové, že

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}.$$

Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ je zadané pomocí matice $^{\mathcal{E}_3}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{C}$ určete hodnost zobrazení BA.

Př. 3 **[cvičení]** Nechť $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$ a nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, kde

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right), \quad ^{\mathcal{X}}B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$, je-li

(a) $(\vec{b})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, (b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$, (c) $(\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Př. 4 **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je definované

$$\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad A\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y + \alpha z \\ -\alpha x + \beta z \end{pmatrix}.$$

V závislosti na parametrech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ najděte $\ker A$ a $A^{-1}\big(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\big)$.

Př. 5 Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$

$$^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ a } \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Nechť $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^\#$, $^{\mathcal{E}_2}\varphi^{\mathcal{Z}} = (1\ 1)$, kde $\mathcal{Z} = \big((3)\big)$. Najděte bázi jádra φA.

Př. 6 Nechť

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{a} \quad \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathbb{C}^3$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ a $\vec{b} \in \mathbb{C}^3$, nalezněte množinu $B^{-1}(\vec{b})$, je-li

$$^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Př. 7 Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

je báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Nalezněte

(a) $\ker A, \mathrm{d}(A)$ a $\mathrm{h}(A)$,

(b) všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$,

(c) $A^{-1}(P)$, tedy vzor podprostoru P, je-li $P = \left[\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right]_\lambda$.

Př. 8 Nechť $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (-2\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - 2\vec{x}_3, -\vec{x}_1 + \vec{x}_3)$ jsou dvě báze vektorového prostoru V_3. Nalezněte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$, jsou-li $A \in \mathcal{L}(V_3)$ a $\vec{b} \in V_3$ takové, že

$$^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (\vec{b})_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Př. 9 V závislosti na parametru $\beta \in \mathbb{R}$ najděte jádro a hodnost zobrazení $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ zadaného pomocí matice ve standardních bázích

$$^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta & 1 \\ -\beta & \beta^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Př. 10 Nechť

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{a} \quad \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

jsou báze $\mathbb{R}^4$ respektive $\mathbb{R}^2$. Nechť $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$ a $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$, kde

$$ {}^{\mathcal{X}}B^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -5 & 0 \\ -4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad {}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

Nalezněte všechna řešení rovnice $BA\,\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Př. 11 Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$$ {}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) $$

je báze $\mathbb{R}^3$. Nalezněte

(a) $\ker A, \mathrm{d}(A)$, $\mathrm{h}(A)$,

(b) všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Př. 12 Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$

$$ {}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & -\alpha \\ \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) $$

je báze $\mathbb{R}^2$. V závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$

(a) najděte jádro A,

(b) určete, zda A je prosté,

(c) najděte obor hodnot $A(\mathbb{R}^2)$,

(d) určete hodnost A.

Př. 13 Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ a $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde

$$ {}^{\mathcal{E}_2}B^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha^2 & -\alpha \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ definujeme } A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}. $$

(a) Rozhodněte v jakém pořadí lze zobrazení skládat.

(b) Pro složené zobrazení najděte v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ jeho hodnost a jádro.

Řešení úloh

Př. 1 (a) báze $A(\mathbb{C}^4)$ je např. $\mathcal{E}_2$, báze jádra je např. $\left(\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\3\end{pmatrix}\right)$,

(b) $\mathrm{h}(A) = 2$, $\mathrm{d}(A) = 2$,

(c) $A^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\3\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Př. 2 pro $\alpha \neq -3$ je $\mathrm{h}(BA) = 3$, pro $\alpha = -3$ je $\mathrm{h}(BA) = 2$.

Př. 3 (a) např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]_\lambda$,

(b) $B^{-1}(\vec{b}) = \emptyset$,

(c) např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Př. 4

- pro $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0$: $\ker A = \left[\begin{pmatrix}\frac{\beta}{\alpha}\\-\frac{\alpha+\beta}{\beta}\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $A^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\alpha}\\\frac{2}{\beta}\\0\end{pmatrix} + \ker A$,
- pro $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0$: $\ker A = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $A^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\beta}\\\frac{1}{\beta}\end{pmatrix} + \ker A$,
- pro $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 0$: $\ker A = \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $A^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\alpha}\\0\\\frac{2}{\alpha}\end{pmatrix} + \ker A$,
- pro $\alpha = \beta = 0$: $\ker A = \mathbb{R}^3$, $A^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \emptyset$.

Př. 5 báze jádra φA je např. $\left(\begin{pmatrix}5\\0\\24\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Př. 6 např. $B^{-1}(\vec{b}) = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Př. 7 (a) $\ker A = \{\vec{0}\}$, $\mathrm{d}(A) = 0$, $\mathrm{h}(A) = 3$

(b) $A^{-1}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right) = \left\{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\right\}$

(c) např. $A^{-1}(P) = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Př. 8 $A^{-1}(\vec{b}) = \{\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + 3\vec{x}_3\}$.

Př. 9

- pro $\beta \neq 0 \wedge \beta \neq 1$: $\mathrm{h}(A) = 2$, $\ker A = \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\\beta\end{pmatrix}\right]_\lambda$,
- pro $\beta = 0$: $\mathrm{h}(A) = 1$, $\ker A = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$,
- pro $\beta = 1$: $\mathrm{h}(A) = 1$, $\ker A = \left[\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Př. 10 např. $(BA)^{-1}\left(\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Př. 11 (a) $\mathrm{h}(A) = 2$, $\mathrm{d}(A) = 1$, $\ker A = \left[\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$,

(b) $A^{-1}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Př. 12

- pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$:

  $\ker A = \{\vec{0}\}$, A je prosté, $A(\mathbb{R}^2) = \left[\begin{pmatrix}1\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\alpha\\\alpha^2\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\mathrm{h}(A) = 2$,
- pro $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$:

  $\ker A = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$, A není prosté, $\mathrm{h}(A) = 1$,

  pro $\alpha = 1$ je $A(\mathbb{R}^2) = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, pro $\alpha = 0$ je $A(\mathbb{R}^2) = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$.

Př. 13 (a) existuje zobrazení AB i BA

(b)
- pro $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$:

  $\mathrm{h}(AB) = 2$, $\ker AB = \{\vec{0}\}$, $\mathrm{h}(BA) = 2$, $\ker BA = \left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$
- pro $\alpha = 0 \vee \alpha = 1$:

  $\mathrm{h}(AB) = 1$, $\ker AB = \left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_\lambda$, $\mathrm{h}(BA) = 1$, $\ker BA = \left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right]_\lambda$.