01LAL cv. 11 — Matice lineárního zobrazení (1. část)

Potřebné pojmy z teorie: matice lineárního zobrazení v bázích, věta o výpočtu obrazu vektoru pomocí matice v bázích, věta o matici složeného zobrazení.

Př. 1 **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, kde pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ platí $A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$.

Nechť $\mathcal{X}$ báze prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{R}^3$ jsou definovány

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sestavte (a) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3}$, (b) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}}$, (c) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$, (d) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}}$.

Př. 2 **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$ je zadané obrazy bazických vektorů prostoru $\mathbb{C}^3$ následovně

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sestavte ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2}$.

Př. 3 **[cvičení]** Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3}$, je-li $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ zadané maticí ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}}$, kde $\mathcal{Y}$ je báze $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{X}$ je báze $\mathbb{R}^2$, platí-li

$${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Př. 4 **[cvičení]**Nechť $A \in \mathcal{L}(V_3)$, $\mathcal{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ a $\mathcal{Y} = (2\vec{x}_1 + 3\vec{x}_2 + \vec{x}_3, 3\vec{x}_1 + 4\vec{x}_2 + \vec{x}_3, \vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + 2\vec{x}_3)$ jsou báze V_3. Sestavte ${}^{\mathcal{Y}}A$, je-li

$${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Př. 5 **[cvičení]** Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^2)$. Nalezněte $A \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, je-li

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Př. 6 Nechť $\mathcal{X}$ báze prostoru $\mathbb{C}^3$ a $\mathcal{Y}$ báze $\mathbb{C}$ jsou definovány následovně

$$\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{Y} = \big((-3)\big).$$

Sestavte matici ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}}$ funcionálu $\varphi \in (\mathbb{C}^3)^{\#}$ definovaného pro každý $\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3$ jako $\varphi(\vec{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Př. 7 Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ definovaný $(Ax)(t) = x(t+1)$ pro každý $x \in \mathcal{P}_3$ a každé $t \in \mathbb{C}$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A$, kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$, v níž pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) = t - t^2, \quad x_2(t) = 1 - t + t^2, \quad x_3(t) = -1 + t.$$

Př. 8 Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^4)$ jsou definovaná pomocí

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad {}^{\mathcal{Y}}B^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde báze $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{Z}$ jsou tvaru

$$\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \mathcal{Z} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

Nalezněte ${}^{\mathcal{E}_2}(BA)^{\mathcal{Z}}$.

Př. 9 Nechť $\mathcal{X} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$ a $\mathcal{Y} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ jsou báze $\mathbb{R}^2$. Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ jsou taková, že

$${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, (\vec{x})_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ platí } B\vec{x} = \begin{pmatrix} -\alpha - 2\beta \\ \alpha \end{pmatrix},$$

Sestavte ${}^{\mathcal{X}}(A - 2B)^{\mathcal{E}_2}$.

Př. 10 Nechť $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ takové, že pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ je

$$(Ax)(t) = t(Dx)(t-1) + 2tx(0),$$

kde D je operátor derivování na $\mathcal{P}$. Sestavte ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}}$, je-li $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ báze $\mathcal{P}_3$ taková, že pro každé $t \in \mathbb{C}$

$$x_1(t) = 1 + t, \quad x_2(t) = 1 - t, \quad x_3(t) = 1 - t - t^2.$$

Řešení úloh

Př. 1 (a) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) ${}^{\mathcal{E}_2}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$,

(c) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

(d) ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Př. 2 ${}^{\mathcal{E}_3}A^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Př. 3 ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 23 & 1 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$.

Př. 4 ${}^{\mathcal{Y}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Př. 5 $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}$.

Př. 6 ${}^{\mathcal{X}}\varphi^{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$.

Př. 7 ${}^{\mathcal{X}}A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Př. 8 ${}^{\mathcal{E}_2}(BA)^{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -1 \\ 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Př. 9 ${}^{\mathcal{X}}(A - 2B)^{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Př. 10 ${}^{\mathcal{X}}A^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.