

01LAL cv. 10 — Lineární funkcionál a zobrazení (2. část)

Potřebné pojmy z teorie: lineární zobrazení, jádro, hodnost a defekt lineárního zobrazení.
2. věta o dimenzi. Věta o řešení rovnice $A\vec{x} = \vec{b}$.

Př. 1 [cvičení] Necht' $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ je pro každé $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definované následovně

$$(a) A\vec{x} = \begin{pmatrix} x_3 - 3x_1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}, \quad (b) A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2x_3 + x_2 \\ 4x_3 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Najděte všechna řešení rovnice $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Př. 2 [cvičení] Necht' $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathbb{C}^3)$ a necht' pro každé $x \in \mathcal{P}_3$, kde $x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ pro každé $t \in \mathbb{C}$, platí

$$Ax = \begin{pmatrix} 2\alpha_0 - 2\alpha_1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_0 - \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Najděte

(a) $h(A)$ a $d(A)$,

(b) $\ker A$,

(c) všechna řešení rovnice $Ax = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Př. 3 [cvičení] Necht' $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3, \mathbb{C}^2)$ je zadané

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ax_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Ax_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathcal{X} = (x_1, x_2, x_3)$ je báze $\mathcal{P}_3$ taková, že pro každé $t \in \mathbb{C}$ platí

$$x_1(t) = 1 - t, \quad x_2(t) = t^2, \quad x_3(t) = 1 + t.$$

Nalezněte množinu všech řešení rovnice $Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Př. 4 [cvičení] Necht' D je operátor derivování a necht' $A \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3)$ je pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ a pro každé $t \in \mathbb{C}$ definované

$$(Ax)(t) = x(-2t + 1).$$

(a) Vyšetřete jádro, defekt a hodnost složeného zobrazení DA ,

(b) najděte všechna řešení rovnice $(DA)x = b$, kde $b(t) = -1 + 4t$ pro každé $t \in \mathbb{C}$.

Př. 5 Necht' $\varphi \in (\mathcal{P}_4)^\#$ takový, že $\varphi(x) = x(-1)$ pro každé $x \in \mathcal{P}_4$ a necht' $P \subset \subset \mathcal{P}_4$, kde

$$P = \left\{ x \in \mathcal{P}_4 \mid \forall t \in \langle -3, 4 \rangle (x(t) = x(1 - t)) \right\}.$$

Najděte bázi $(\varphi^{-1}(0) \cap P)$.

Př. 6 Necht' $\varphi \in (\mathcal{P}_3)^\#$, kde pro každé $x \in \mathcal{P}_3$ platí $\varphi(x) = x(i) - x(0)$. Řešte rovnici $\varphi(x) = i - 1$.

Př. 7 Necht' $\varphi \in (\mathcal{P}_3)^\#$ je pro každý $x \in \mathcal{P}_3$ definovaný

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \beta_2 + x(\mathbf{i}),$$

kde

$$(x)_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad (x)_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

přičemž $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ je standardní báze $\mathcal{P}_3$ a $\mathcal{X} = (e_3, e_1, e_2)$ je báze $\mathcal{P}_3$.

Nalezněte všechna řešení rovnice $(\phi S)(x) = 1$, kde S je operátor integrování.

Řešení úloh

Př. 1 (a) $A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]_{\lambda}$

(b) $A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \emptyset.$

Př. 2 (a) $\text{h}(A) = 2, \text{d}(A) = 1$

(b) $\ker A = [e_1 + e_2 + e_3]_{\lambda}$

(c) $A^{-1}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = e_1 - 2e_2 + \ker A$

Př. 3 $A^{-1}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = a + [x]_{\lambda}$, kde pro každé $t \in \mathbb{C}$ je $a(t) = -2$ a $x(t) = 1 - t - t^2$.

Př. 4 (a) $\ker(DA) = [e_1]_{\lambda}$, $\text{d}(DA) = 1$, $\text{h}(DA) = 2$

(b) $(DA)^{-1}(b) = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3 + \ker(DA)$

Př. 5 báze např. $(2e_1 + e_2 - e_3)$.

Př. 6 $\varphi^{-1}(\text{i} - 1) = e_2 + e_3 + [e_1, \text{i}e_2 - e_3]_{\lambda}$.

Př. 7 $(\phi S)^{-1}(1) = -2e_2 + [e_1 + 2(1 + \text{i})e_2]_{\lambda}$.