

Cvičení 2 — Kleenova věta, hierarchie vět o vkládání

verze: 14. října 2025

Potřebné pojmy z teorie

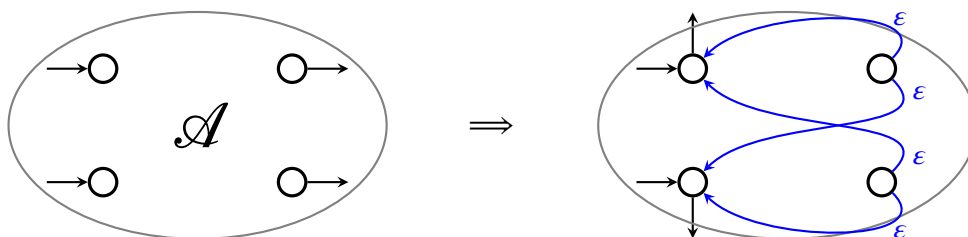
- Třída $\text{Rec}(\Sigma^*)$, uzavřenost této třídy na operace.
- Kleenova věta.
- Věty o vkládání (verze V1, V2 a V3) pro rozeznávané jazyky.

Zápočtové příklady a problémy

Př 1.1 Na přednášce jsme dokazovali uzavřenost třídy rozeznávaných jazyků na iteraci pomocí následující konstrukce: Mějme $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, F)$, konstruujeme (schématicky znázorněno na následujícím obrázku) automat $\mathcal{A}_S = (Q, \Sigma, E_S, I, F_S)$, kde

- $F_S = I$
... koncovými stavy budou pouze počáteční stavy původního automatu,
- $E_S = E \cup \{(t, \varepsilon, i) \mid t \in F, i \in I\}$
... přidáme ε -hrany z původních koncových do počátečních stavů.

Pak $L(\mathcal{A}_S) = (L(\mathcal{A}))^*$.



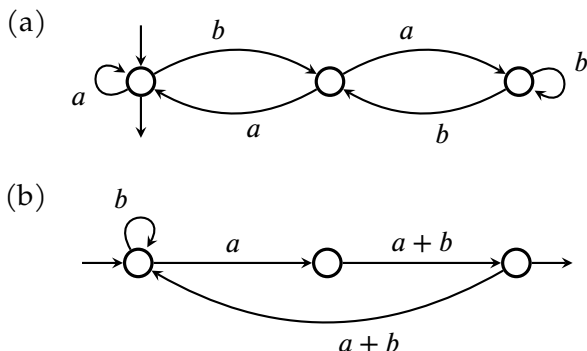
Najděte protipříklad ke správnosti této konstrukce. Jinými slovy nalezněte konkrétní automat $\mathcal{A}$ takový, že na jeho základě zkonstruovaný automat $\mathcal{A}_S$ nepřijímá iteraci jazyka $L(\mathcal{A})$.

Př 1.2 Pomocí konstrukcí z důkazů vět o uzavřenosti třídy $\text{Rec}\Sigma^*$ na zřetězení a iteraci zkonstruujte automat, který rozeznává jazyk¹

- $[(a^*b^*)^*]$,
- $[(a^*b + bb^*a)^*]$.

¹Jako zápočtovou úlohu stačí vyřešit jednu z podúloh.

Př 1.3 Najděte regulární výraz (algoritmus si zvolte sami) popisující jazyk přijímaný následujícím automatem².



Př 1.4 Dokažte, že jazyk

$$U_1 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup [(a+b)^* ba(a+b)^*]$$

splňuje nutnou podmínku rozeznatelnosti z věty o vkládání V1, ale nesplňuje nutnou podmínku rozeznatelnosti z věty o vkládání V2.

Př 1.5 Dokažte, že jazyk

$$U_2 = \{(aab)^n (abb)^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup [(a+b)^* (aaa + aabb + bbb)(a+b)^*]$$

splňuje nutnou podmínku rozeznatelnosti z věty o vkládání V2, ale nesplňuje nutnou podmínku rozeznatelnosti z věty o vkládání V3.

Další příklady a problémy

Př 1.6 Necht $\mathcal{A}$ je deterministický automat rozeznávající jazyk L . Zkonstruuje automat $\mathcal{B}$, který rozeznává jazyk

$$\text{cycle}(L) = \{vu \mid uv \in L\}.$$

Př 1.7 Necht $\text{cycle}(L)$ je definovaný jako v předchozím příkladě. Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí následující implikace

$$\text{cycle}(L) \in \text{Rec } \Sigma^* \implies L \in \text{Rec } \Sigma^*.$$

Př 1.8 Necht $L \in \text{Rec } \{0, 1\}^*$. Definujeme

$$L_{\min} = \{w \in L \mid \forall v \in L (|v| = |w| \Rightarrow v \geq_{\text{lex}} w)\},$$

tedy $L_{\min}$ je jazykem těch slov z L , která jsou v lexikografickém uspořádání nejmenší mezi slovy stejné délky v L . Dokažte, že $L_{\min} \in \text{Rec } \{0, 1\}^*$.

²Jako zápočtovou úlohu stačí vyřešit jednu z podúloh.