Markovské procesy

LS 2023/24, FJFI ČVUT

7. Cvičení

Řetězce se spojitým časem

1. V dílně je pět strojů a opravář. Každý stroj pracuje, dokud se nepokazí, což se děje s exponenciálním rozdělením s parametrem 0.20 (v hodinách). Na druhou stranu, oprava každého stroje je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s parametrem 0.50 (v hodinách). V každou chvíli probíhá oprava na nejvýše jednom přístroji. Spočtěte, kolik času stráví v dlouhodobém horizontu opravář bez práce.

2. V databázi dochází ke dvěma nezávislým Poissonovým procesům: proces čtení s parametrem λ_R a proces zápisu s parametrem λ_W.

   a) Jaká je pravděpodobnost, že interval mezi dvěma příkazy čtení je větší než $t > 0$?
   b) Jaká je pravděpodobnost, že v časovém intervalu $[0, t]$ dojde k nejvýše třem zápisům?
   c) Jaká je pravděpodobnost, že příští operace bude čtení?
   d) Najděte rozložení počtu příkazů ke čtení v intervalu $[0, t]$, pokud víte, že v tomto intervalu došlo celkem k n povelům čtení a zápisu.

3. Délka praskliny ve skále je měřena na celé milimetry a je modelována procesem zrodu se spojitým časem a intenzitami $\lambda_k = (1 + k)^\varrho$, kde k je aktuální délka pukliny. Ukažte, že pro $\varrho > 1$ dochází ke konečné střední době růstu praskliny do nekonečna. Odvoďte, že skále se skoro jistě rozpadne v konečném čase.

4. Nechť N_t je Poissonův proces s parametrem $\lambda = 3$. Nechť T_n je doba příchodu n-té události. Spočtěte pro $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

   a) $\mathbb{P}(N_{t_3} = 5 | N_{t_1} = 1)$,
   b) $\mathbb{E}[N_{t_1} N_{t_4} (N_{t_3} - N_{t_2})]$,
   c) $\mathbb{E}[N_{t_2} | T_2 > 1]$.

5. Nechť X_t je proces vzniku a zániku na $0, 1, \ldots, N$ s parametry $\lambda_n = \alpha(N - n)$ a $\mu_n = \beta n$. Najděte stacionární rozdělení $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

6. Uvažujte proces vzniku s parametry $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$. Spočtěte $P_{0,n}(t)$ pro $n = 0, 1, 2, 3$.

7. Uvažujte proces vzniku $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ začínající v $X_0 = 0$. Nechť T_k je čas vzniku k-té události. Ukažte, že
$$\mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t + s) = P_{0,0}(t)(P_{0,0}(s) + P_{0,1}(s)).$$
   Najděte hustotu rozdělení (T_1, T_2) a $(\tau_0, \tau_1) := (T_1, T_2 - T_1)$.

8. Auta projíždějí daným místem na silnici podle Poissonova procesu s parametrem $\lambda > 0$. Chodec, který se chystá přejít přes cestu, čeká, až uvidí, že v příštích T jednotkách času nepřijíždí žádné auto. Jaká je pravděpodobnost, že chodec nebude muset vůbec čekat? Jaká je průměrná doba čekání?

9. Nechť $X_1(t)$ a $X_2(t)$ jsou dva nezávislé dvoustavové Markovské řetězce na $\{0, 1\}$ s generátorem
$$\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}.$$
   Dokažte, že $Z(t) = X_1(t) + X_2(t)$ je Markovský řetězec na $\mathbb{S} = \{0, 1, 2\}$ a najděte semigrupu matic přechodu $P(t)$ procesu $Z(t)$.

10. Nechť $(N_t^1)_{t\in\mathbb{R}^+}$ a $(N_t^2)_{t\in\mathbb{R}^+}$ jsou dva nezávislé Poissonovy procesy s parametry $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$.

   a) Ukažte, že $(N_t^1 + N_t^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ je Poissonův proces a najděte jeho intenzitu.
   b) Nechť $M_t = N_t^1 - N_t^2$. Ukažte, že $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ má nezávislé a stacionární přírůstky.
   c) Najděte rozdělení $M_t - M_s$, $0 < s < t$.
   d) Nechť $c > 0$. Spočtěte $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|M_t| \le c)$.
   e) Interpretujte M_t a d), pokud N_t^1 je počet zákazníků přicházejících ke stanovišti taxi a N_t^2 je počet přijíždějících taxíků.

11. Nechť $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ na $\{0, 1, \ldots, N\}$ je proces vzniku a zániku se semigrupou matic přechodu $(P(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ a intenzitami vzniku a zániku

$$\lambda_n = (N-n)\lambda, \quad \mu_n = n\mu, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

   a) Najděte generátor Q procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
   b) Z dopředné Kolmogorovy rovnice $P'(t) = P(t)Q$ odvoďte pro $1 \le k \le N-1$

$$\begin{cases} P'_{n,0}(t) = -\lambda_0 P_{n,0}(t) + \mu_1 P_{n,1}(t), \\ P'_{n,k}(t) = \lambda_{k-1} P_{n,k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) P_{n,k}(t) + \mu_{k+1} P_{n,k+1}(t), \\ P'_{n,N}(t) = \lambda_{N-1} P_{n,N-1}(t) - \mu_N P_{n,N}(t). \end{cases}$$

   c) Nechť

$$G_k(s,t) = \mathbb{E}[s^{X_t} | X_0 = k] = \sum_{n=0}^{N} s^n \mathbb{P}(X_t = n | X_0 = k) = \sum_{n=0}^{N} s^n P_{k,n}(t)$$

   je vytvořující funkce X_t při $X_0 = k$. Pomocí b) ukažte, že $G_k(s,t)$ splňuje

$$\frac{\partial G_k}{\partial t}(s,t) = \lambda N(s-1) G_k(s,t) + (\mu + (\lambda - \mu)s - \lambda s^2) \frac{\partial G_k}{\partial s}(s,t)$$

   a $G_k(s,0) = s^k, k = 0, 1, \ldots, N$.
   d) Ukažte, že řešení této rovnice je dáno pomocí $(k = 0, \ldots, N)$

$$G_k(s,t) = \frac{1}{(\lambda+\mu)^N} \left\{ \mu + \lambda s + \mu(s-1) e^{-(\lambda+\mu)t} \right\}^k \times \left\{ \mu + \lambda s - \lambda(s-1) e^{-(\lambda+\mu)t} \right\}^{N-k}.$$

   e) Ukažte, že

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t | X_0 = k] = {} & \frac{k}{(\lambda+\mu)^N} (\lambda + \mu e^{-(\lambda+\mu)t}) (\mu+\lambda)^{k-1} (\mu+\lambda)^{N-k} \\ & + \frac{N-k}{(\lambda+\mu)^N} (\lambda+\mu)^k (\lambda - \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}) (\mu+\lambda)^{N-k-1}. \end{aligned}$$

   f) Spočtěte $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbb{E}[X_t | X_0 = k]$ a ukažte, že nezávisí na $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$.

12. Nechť $T_1, T_2, \ldots$ je posloupnost příchodů k-té události Poissonova procesu $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ s intenzitou $\lambda > 0$. Pro integrovatelnou $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ukažte, že

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N_t} f(T_k)\right] = \lambda \int_0^t f(s) ds.$$

   Uvažujte jen $f = \chi_{[a,b]}$ pro $0 \le a \le b \le t$, zbytek pak plyne přes lineární kombinace a aproximací i pro libovolné integrovatelné funkce.