Úlohy k předmětu
Moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic

Matěj Tušek

26. září 2017

Abstrakt

Níže uvedené úlohy slouží k přípravě na přednášky i zkoušku z předmětu *Moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic*. Schopnost řešit hvězdičkou označené úlohy bude vyžadována u studentů, kteří budou u zkoušky aspirovat na lepší známku, tj. A či B.

Úloha 1. *Buď η standardní vyhlazovací funkce, $\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\eta(x/\varepsilon)$ pro $\varepsilon > 0$, a $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U)$, kde U je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Potom $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * f \in C^\infty(U_\varepsilon)$ pro libovolnou $U_\varepsilon := \{x \in U \,|\, \mathrm{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$. Navíc platí*

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\varepsilon(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Úloha 2 ($\star$)**.** *Buď u harmonická na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ a $r > 0$ takové, že $B(x_0, r) \subset U$. Potom*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0,r))},$$

kde $k = |\alpha|$. (Návod: Použijte matematickou indukci podle stupně derivace.)

Úloha 3. *Buď $\mathcal{G}$ Greenova funkce pro Poissonovu rovnici na U. Ukažte, že pro všechna $x, y \in U : x \neq y$, $\mathcal{G}(x,y) = \mathcal{G}(y,x)$. (Návod: Pro pevné $x, y \in U$ položte $v(z) := \mathcal{G}(x,z)$ a $w(z) := \mathcal{G}(y,z)$; potom pro tuto dvojici použijte Greenovu formuli na $U \setminus (B(x,\varepsilon) \cup B(y,\varepsilon))$, kde ε je dostatečně malé; nakonec pošlete $\varepsilon \to 0$.)*

Úloha 4. *Dokažte slabý princip maxima pro eliptický operátor L s nezáporným členem nultého řádu ($c \geq 0$). Ten říká, že každé subřešení u splňuje nerovnost $\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+$, kde u^+ značí kladnou část funkce u. (Návod: Použijte slabý princip maxima pro $L - c$ na oblasti $V := \{x \in U : u(x) > 0\}$.)*

Úloha 5. *Formulujte Hopfovo lemma pro superřešení.*

Úloha 6. *Buď $u \in W^{k,p}(U)$. Dokažte, že slabé derivace $D^\alpha u$ nezávisí na volbě reprezentanta. Dále ukažte, že slabé derivace jsou záměnné, tj. $D^\beta D^\alpha u = D^{\alpha+\beta} u$ pro α, β : $|\alpha| + |\beta| \leq k$, a že pro libovolnou otevřenou $V : V \subset U$ platí $u \in W^{k,p}(V)$. Konečně dokažte Leibnizovo pravidlo pro součin u s libovolným prvkem $\mathscr{D}(U)$.*

Úloha 7 ($\star$). *Uvažujme na $X := \bigoplus_{i=1}^N X_i$, kde X_i je normovaný prostor, následující normu, tzv. l^p–normu,*

$$\|(f_1, \dots, f_N)\|_p = \left(\sum_{i=1}^N \|f_i\|_{X_i}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$p \in \langle 1, +\infty)$. Ukažte, že jsou-li všechny X_i separabilní, potom i X je separabilní. Pro $p \in (1, +\infty)$ nalezněte duální prostor k X a ukažte, že jsou-li všechny X_i reflexivní, je i X reflexivní. Nejprve uvažujte N konečné a potom se pokuste odvodit totéž pro spočetně nekonečný direktní součet.

Úloha 8. *Buď $k \in \mathbb{N}_0$. Dokažte, že pro libovolné $r > 0$ existuje $\zeta_r \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tak, že*

$$\zeta_r = \begin{cases} 1 & \text{na } B(0,r) \\ 0 & \text{na } \mathbb{R}^n \setminus B(0, r+1) \end{cases}$$

a $\forall \alpha : |\alpha| \leq k$, $\forall r > 0 : \|D^\alpha \zeta_r\| < C$. (Konstanta C tedy nezávisí na volbě α a především ani na volbě r!) Dále ukažte, že pro libovolné $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ platí, že pro jakékoliv $\delta > 0$ nalezneme $r_\delta > 0$ tak, že pro všechna $r > r_\delta$ dostaneme $\|\zeta_r u - u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} < \delta$.

Úloha 9. *Buď L eliptický. Převeďte slabou formulaci úlohy*

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{na } U \\ u &= g \neq 0 && \text{na } \partial U \end{aligned}$$

na slabou formulaci eliptického problému s Dirichletovou hraniční podmínkou.

Úloha 10. *Buďte V otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$, $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(V)$ a $\varphi \in \mathscr{D}(V)$. Dokažte, že pro všechna nenulová v absolutní hodnotě dostatečně malá h platí ("integrace per-partes")*

$$\int_V u D_i^h \varphi \,\mathrm{d}x = - \int_V (D_i^{-h} u) \varphi \,\mathrm{d}x.$$

Úloha 11. *Položme $v^h(x) := v(x + he_i)$. Ukažte, že platí ("Leibnizovo pravidlo")*

$$D_i^h(vw) = (D_i^h v) w + v^h D_i^h w.$$

Úloha 12 ($\star$). *Dokažte vnitřní regularitu vyššího stupně pro slabé řešení eliptické rovnice. Konkrétněji nechť pro $m \in \mathbb{N}_0$: a^{ij}, b^i, $c \in C^{m+1}(U)$, $f \in H^m(U)$ a $u \in H^1(U)$ je slabé řešení rovnice $Lu = f$ na U. Potom $u \in H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(U)$ a pro libovolné V : $V \subset\subset U$ platí*

$$\|u\|_{H^{m+2}(V)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(U)} + \|u\|_{L^2(U)} \right),$$

kde konstanta C závisí jen na m, U, V a koeficientech L.

Úloha 13. *Dokažte, že zobrazení*

$$u \mapsto \|u\|_{C^{k,\gamma}(\bar{U})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\bar{U})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\bar{U})}$$

z Hölderova prostoru $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ do $\langle 0, +\infty)$ je norma a $C^{k,\gamma}(\bar{U})$ je s touto normou úplný.